<u>Wykład II</u> Algebra

<u>Ciało liczb zespolonych</u>

Liczby zespolone - rozszerzenie ciała liczb rzeczywistych, w którym rozwiązywalne są wszelkie równania kwadratowe.

<u>Heurystyczne wprowadzenie liczb zespolonych</u>

Algebraiczna postać liczb

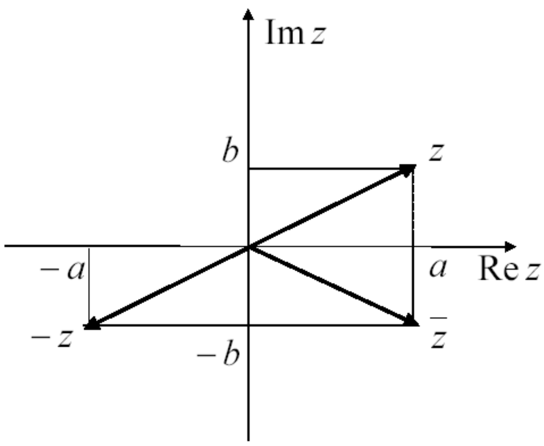
$z = a + ib$, $a \equiv \operatorname{Re} z$ <u>część rzeczywista</u>, $b \equiv \operatorname{Im} z$ <u>część urojona</u>, $i^2 = -1$
($i \neq \sqrt{-1}$, bo prowadzi do sprzeczności: $-1 = i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$)
liczba rzeczywista a: $z = a + i0$

Działania na liczbach zespolonych

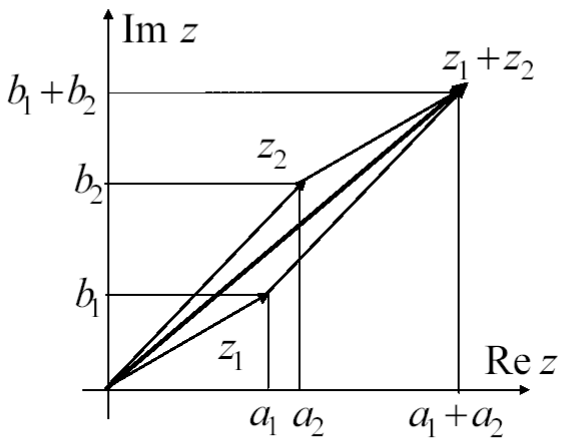
$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2$
Dodawanie: $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$
Liczba z' przeciwna do z: $z + z' = 0 + i0 = 0 \Rightarrow z' = -z = -a - ib$
Odejmowanie: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
Mnożenie liczb: $z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$
Liczba $\frac{1}{z}$ odwrotna do z: $z\frac{1}{z} = 1 + i0 = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$
Dzielenie: $z_1 : z_2 = z_1 \frac{1}{z_2}$

liczba $\bar{z}$ sprzężona do z: $\bar{z} = a - ib$
sprzężenie sumy: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
sprzężenie iloczynu: $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \, \bar{z}_2$

Geometryczna interpretacja liczby zespolonej



Wykład II cd. Algebra



Moduł liczby z: $|z| = \sqrt{\bar{z}\,z} = \sqrt{a^2+b^2}$

$|z| \in \mathbf{R}, \quad |z| > 0$

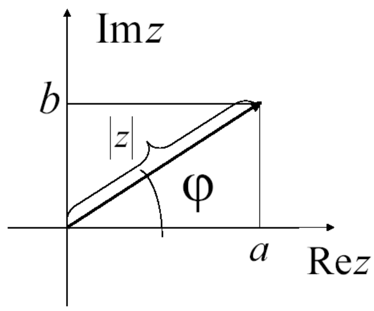
Moduł sumy liczb zespolonych

$|z_1+z_2| = \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$

$|z_1|+|z_2| = \sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}$

Nierówność trójkąta: $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

Moduł iloczynu liczb zespolonych: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$



Trygonometryczna postać liczby zespolonej

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, φ - faza, $0 \le \varphi < 2\pi$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big)$$

$(\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\beta)$

$$z_1 z_2 \cdots z_n = |z_1||z_2|\cdots|z_n|\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2\cdots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2\cdots+\varphi_n)\big)$$

Wzór de Moivre'a

$z^n = |z|^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = |z|^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big)$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

$n = 2 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos(2\varphi), \quad 2\cos\varphi\sin\varphi = \sin(2\varphi)$

Wykład II cd. Algebra

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Pierwiastek *n*-tego stopnia liczby *z* to liczba *w* taka, że $z = w^n$.

Twierdzenie:
Jeśli $z \neq 0$, to istnieje *n* różnych pierwiastków *n*-tego stopnia liczby *z*.
Dowód Niech $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$

$$w^n = |w|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

$$\mathrm{Re}(w^n) = |w|^n\cos(n\varphi) = \mathrm{Re}(z) = |z|\cos\phi$$

$$\mathrm{Im}(w^n) = |w|^n\sin(n\varphi) = \mathrm{Im}(z) = |z|\sin\phi$$

$$|w|^n = |z|, \quad n\varphi = \phi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$|w| = |z|^{1/n}, \quad \phi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \cdots (n-1)$$

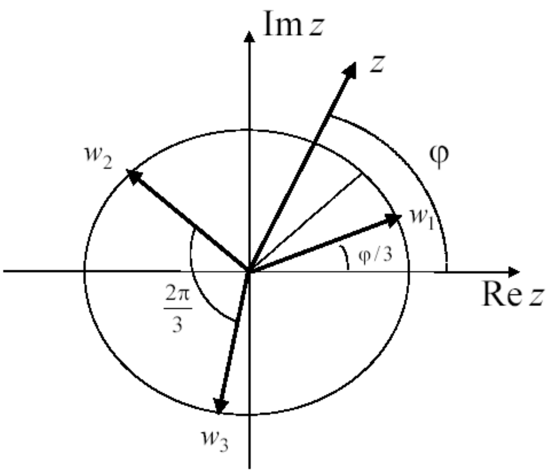
Przykład

$n = 3 \quad |z| > 1$

$$w_1 = \sqrt[3]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right)\right)$$

$$w_3 = \sqrt[3]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right)\right)$$



<u>Wykład II cd.</u> Algebra

Liczby zespolone jako pary liczb rzeczywistych (konstrukcja Hamiltona)

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{z = (a,b) : a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$$

Działania

$z_1 = (a_1, b_1)$, $z_1 = (a_2, b_2)$

Dodawanie: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

Liczba *z'* przeciwna do z: $z + z' = (0,0) \Rightarrow z' = -z = (-a, -b)$

Odejmowanie: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

Mnożenie liczb: $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Liczba $\frac{1}{z}$ odwrotna do z: $z\frac{1}{z} = (1,0) \Rightarrow \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}\right)$

Dzielenie: $z_1 : z_2 = z_1 \frac{1}{z_2}$

liczba rzeczywista a: $(a,0)$

liczba urojona b: $(0,b)$ $(i=(0,1))$

C jest ciałem (wykazać).

Zasadnicze twierdzenie algebry

Każde równanie stopnia *n* o współczynnikach zespolonych

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

ma co najmniej jeden, a maksymalnie *n* różnych pierwiastków w ciele liczb zespolonych.