# Wykład VI  Algebra

## Przekształcenia liniowe przestrzeni wektorowych

**Definicja:** Przekształcenie $A:V\to U$ , gdzie *V, U* są przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem *K* jest homomorfizmem, jeśli

1) $\forall x,y\in V\ A(x+y)=A(x)+A(y)$,
2) $\forall x\in V\ \forall\alpha\in K\ A(\alpha x)\equiv\alpha A(x)$.

**Definicja:** Przekształcenie $A:V\to U$, gdzie *V, U* są przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem *K* jest izomorfizmem, jeśli jest homomorfizmem i bijekcją (odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym).

Homomorfizm przestrzeni w „siebie” nazywa się endomorfizmem.

Izomorfizm przestrzeni w „siebie” nazywa się automorfizmem.

**Twierdzenia:** Homomorfizm $A:V\to U$ jest jednoznacznie określony przez zdefiniowanie działania *A* na wektory bazy *V*.

**Dowód:** $\{e_1,e_2,\dots e_n\}$ - baza *V*, $Ae_i=g_i\in U$, $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$,

$Ax=A\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Ae_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i g_i=y$. Należy pamiętać, że rozkład wektora w bazie jest jednoznaczny.

$\{g_1,g_2,\dots g_n\}$ nie jest bazą *U*; staje się bazą, gdy *A* jest izomorfizmem („izomorficznym obrazem bazy jest bazą”).

**Definicja:** Jądrem homomorfizmu $A:V\to U$ nazywamy podzbiór *V*, oznaczany jako $\ker A$, taki że $\forall x\in\ker A\quad Ax=0$.

**Twierdzenie:** $\ker A$ jest podprzestrzenią *V*.

**Dowód:** Należy wykazać, że $\ker A$ jest przestrzenią wektorową, czyli że:

1) $\forall x,y\in\ker A\Rightarrow(x+y)\in\ker A$,
2) $\forall x\in\ker A\ \ \forall\alpha\in K\Rightarrow\alpha x\in\ker A$.

Jest to oczywiste: $Ax=0\wedge Ay=0\quad\Rightarrow\quad A(x+y)=Ax+Ay=0\wedge A(\alpha x)=\alpha Ax=0$.

Jeśli *A* jest izomorfizmem, to $\ker A=\{x=0\}$.

# <u>Wykład VI cd.</u> Algebra

**<u>Definicja:</u>** <u>Defektem homomorfizmu</u> $A: V \to U$ nazywamy $\dim \ker A$.

**<u>Definicja:</u>** <u>Obrazem homomorfizmu</u> $A: V \to U$ nazywamy podzbiór $U$, oznaczany jako $\operatorname{Im} A$, taki że $\{y \in U, \quad \forall y \in \operatorname{Im} A \quad \exists x \in V \quad Ax = y\}$.

**<u>Definicja:</u>** <u>Rzędem homomorfizmu</u> $A: V \to U$ , oznaczanym jako $r(A)$, nazywamy $\dim \operatorname{Im} A$.

Jeśli $A$ jest izomorfizmem, to $\operatorname{Im} A = U$ i $\dim \operatorname{Im} A = \dim V$.

**<u>Przykład:</u>** $A: R^3 \to R^2, \quad A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. $A$ jest homomorfizmem; $\ker A = \left\{ x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right\}$,

wektory postaci $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ tworzą przestrzeń wektorową; $\dim \ker A = 1$, $\dim \operatorname{Im} A = 2$.

## <u>Reprezentacja macierzowa endomorfizmu</u>

$A: V \to V$, $\dim V = n$, $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ - baza $V$, $Ax = y$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ , $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ ,

Szukamy macierzy takiej, że

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = y.$$

Zauważamy, że ową macierz określa równanie $Ae_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$ (uwaga na kolejność indeksów). Istotnie $Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \alpha_i e_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j = y$.

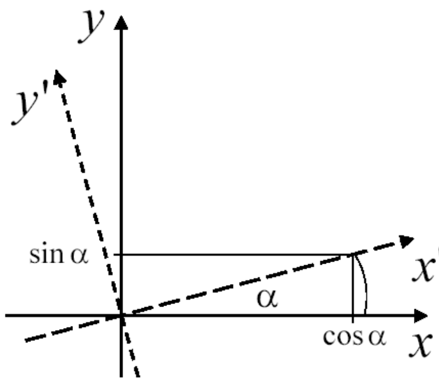
Macierz $a_{ij}$ jest <u>reprezentacją macierzową</u> $A$ w bazie $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$.

Przyporządkowanie macierzy endomorfizmowi jest <u>jednoznaczne</u>.

# <u>Wykład VI cd.</u> Algebra

**<u>Przykład:</u>** $A$ jest obrotem wektorów z $R^2$. Wektory zapisujemy w bazie $\{e_x, e_y\}$.

$$Ae_x = a_{xx}e_x + a_{yx}e_y = \cos\alpha\, e_x + \sin\alpha\, e_y$$
$$Ae_y = a_{xy}e_x + a_{yy}e_y = -\sin\alpha\, e_x + \cos\alpha\, e_y$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$




$A$ jest automorfizmem, $\det A = 1$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

**<u>Twierdzenia:</u>** Jeśli $A : V \to V$ jest endomorfizmem to $\dim \operatorname{Im} A + \dim \ker A = \dim V$ .

**<u>Twierdzenia:</u>** Rząd endomorfizmu jest równy rzędowi macierzy będącej jego macierzową reprezentacją w dowolnej bazie.

**<u>Twierdzenia:</u>** Jeśli $A : V \to V$ jest endomorfizmem to następujące warunki są równoważne:

1) $\operatorname{Im} A = V$ ,
2) $\dim \operatorname{Im} A = \dim V$ ,
3) $\dim \ker A = 0$ ,
4) $\mathrm{r}(A) = \dim V$ ,
5) macierz $A$ jest nieosobliwa,
6) $A$ jest automorfizmem.

# Zmiana bazy

## Macierz zmiany bazy

Mamy dwie bazy przestrzeni *V*: $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ i $\{g_1, g_2, \dots g_n\}$. Endomorfizm jest zdefiniowany jednoznacznie, jeśli określić jego działanie na wektorach bazy. A zatem $Se_i = g_i, \quad i = 1,2,\dots n$ definiuje automorfizm. Jego reprezentacja macierzowa w bazie $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ nazywa się macierzą zmiany bazy.

$$Se_i = g_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ji} e_j \text{ (uwaga na kolejność indeksów)}, \quad S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}.$$

## Zmiana współrzędnych

Zmiana współrzędnych $x^e$ wektora $x$ w bazie $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ na współrzędne $x^g$ w bazie $\{g_1, g_2, \dots g_n\}$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^g g_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^g \sigma_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^e e_j \quad \Rightarrow \quad \alpha_j^e = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ji} \alpha_i^g \quad \Rightarrow \quad x^e = Sx^g$$

**Przykład:** W przestrzeni $R^2$ mamy dwie bazy: $\left\{e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ oraz $\left\{g_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Macierz zmiany bazy określają równania:

$$g_1 = \sigma_{11} e_1 + \sigma_{21} e_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \sigma_{11}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sigma_{21}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$g_2 = \sigma_{12} e_1 + \sigma_{22} e_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \sigma_{12}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sigma_{22}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

które dają: $\sigma_{11} = 1, \quad \sigma_{21} = 1, \quad \sigma_{12} = 1, \quad \sigma_{22} = -1$, tzn. $S = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

$$\det S = -2, \quad S^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \quad SS^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

# <u>Wykład VI cd.</u> Algebra

## <u>Zmiana reprezentacji macierzowej</u>

Mamy endomorfizm $A: V \to V$, a $A^e$ jest jego reprezentacją macierzową w bazie $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$. Szukamy macierzowej reprezentacji tego endomorfizmu w bazie $\{g_1, g_2, \dots g_n\}$, które oznaczamy $A^g$.

Obliczam $y = Ax$ na 2 sposoby:

1) $Ax = A\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^g g_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^g A g_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i^g a_{ji}^g g_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \alpha_i^g a_{ji}^g \sigma_{lj} e_l$

2) $Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^g A g_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^g A \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ji} e_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^g \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ji} A e_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \alpha_i^g \sigma_{ji} a_{lj}^e e_l$

Przyrównując 1) i 2), co ma zachodzić dla dowolnego *x* dostajemy:

$$\sum_{l=1}^{n} a_{lj}^e \sigma_{ji} = \sum_{l=1}^{n} \sigma_{lj} a_{ji}^g ,$$

co w zapisie macierzowym daje $A^e S = S A^g$ lub $A^e = S A^g S^{-1}$.

Ponieważ $x^e = S x^g$ oraz $A^e = S A^g S^{-1}$, $y^e = A^e x^e = S A^g S^{-1} S x^g = S A^g x^g$.

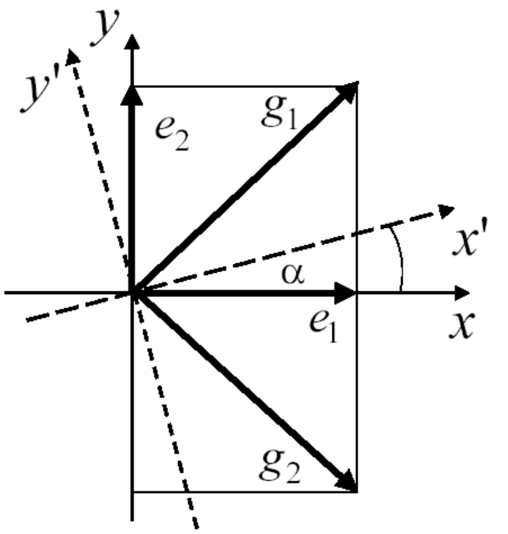
**<u>Przykład:</u>** Macierz obrotu $R^2$ w bazie

$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$ ma postać $A^e = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

W bazie $\left\{ g_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ mamy zaś

$$A^g = S A^e S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^g = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$



# <u>Wykład VI cd.</u> Algebra

## <u>Wektory własne i wartości własne endomorfizmów</u>

**<u>Definicja:</u>** <u>Wektorem własnym</u> endomorfizm $A:V\to V$, nazywamy niezerowy wektor *x* spełniający równanie

$$Ax=\lambda x,$$

w którym $\lambda$ jest liczbą z ciała, nad którym rozpięta jest przestrzeń *V*; $\lambda$ nazywa się <u>wartością własną</u> odpowiadającą wektorowi *x*.

Niech *A* będzie endomorfizmem $A:V\to V$, $\dim V=n$, a $A$ jego reprezentacją macierzową. Wówczas równanie na wektory własne zapisujemy jako

$$(A-\lambda I)x=0,$$

gdzie *I* jest macierzą jednostkową. Warunkiem istnienia rozwiązań tego (jednorodnego) równania jest spełnienie <u>równania charakterystycznego</u>:

$$\det(A-\lambda I)=0.$$

Skoro $\dim V=n$, $\det(A-\lambda I)$ jest wielomianem *n*-tego stopnia ze względu na $\lambda$, zwanym <u>wielomianem charakterystycznym</u>. Jeśli *V* jest przestrzenią nad ciałem liczb zespolonych równanie charakterystyczne ma zawsze co najmniej jeden pierwiastek. Stąd twierdzenie:

**<u>Twierdzenie:</u>** Endomorfizm przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb zespolonych ma co najmniej jeden, a maksymalnie *n* różnych wektorów własnych i wartości własnych.

**<u>Twierdzenie:</u>** Wielomian charakterystyczny, a co za tym idzie i wartości własne, nie zależą od bazy reprezentacji macierzowej endomorfizmu.

**Dowód:** Mamy dwie bazy przestrzeni *V*: $\{e_1,e_2,\dots e_n\}$ i $\{g_1,g_2,\dots g_n\}$, w których równania własne mają postać: $A^e x^e=\lambda^e x^e$ i $A^g x^g=\lambda^g x^g$. Wielomiany charakterystyczne równe więc są $\det\left(A^e-\lambda^e I\right)$ i $\det\left(A^g-\lambda^g I\right)$. Ponieważ $A^g=S^{-1}A^e S$, mamy

$$\det\left(A^g-\lambda^g I\right)=\det\left(S^{-1}A^e S-\lambda^g I\right)=\det\left(S^{-1}\left(A^e-\lambda^g I\right)S\right)=\det\left(A^e-\lambda^g I\right).$$

**<u>Twierdzenie:</u>** Jeżeli endomorfizm $A:V\to V$, $\dim V=n$, ma *n* liniowo niezależnych wektorów własnych, to w bazie tworzonej przez te wektory reprezentacja macierzowa jest diagonalna, a wartości własne są elementami głównej przekątnej.

Twierdzenie to i twierdzenie odwrotne są w oczywisty sposób prawdziwe.

# Wykład VI cd. Algebra

**Przykład 1:** Macierz obrotu $R^2$ w bazie $\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ma postać $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$. Wielomian charakterystyczny równy jest $\det\begin{pmatrix}\cos\alpha-\lambda & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha-\lambda\end{pmatrix}=(\cos\alpha-\lambda)^2+\sin^2\alpha=\lambda^2-2\lambda\cos\alpha+1$. Równanie charakterystyczne $\lambda^2-2\lambda\cos\alpha+1=0$ ma rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych $\lambda=\cos\alpha$ tylko dla $\alpha=0$, $\alpha=\pi$ i $\alpha=2\pi$ bo $\Delta=-4\left(1-\cos^2\alpha\right)\le 0$. Gdy $\alpha=0$ lub $\alpha=2\pi$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ jest przekształceniem tożsamościowym, a dla $\alpha=\pi$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Wartościami własnymi tych trywialnych przekształceń jest 1 lub –1, a zbiór wektorów własnych pokrywa się z $R^2$.

**Przykład 2:** Reprezentacja macierzowa odbicia $O$ względem osi $X$ przestrzeni $R^2$ w bazie $\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ma postać $O=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Wektorami własnymi są $\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$ z wartościami własnymi, odpowiednio, 1 i –1. Wielomian charakterystyczny równy jest $(\lambda-1)(\lambda+1)$.

**Przykład 3:** Reprezentacja macierzowa odbicia $O$ względem prostej $x=y$ przestrzeni $R^2$ w bazie $\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ma postać $O=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Łatwo bowiem zauważyć, że $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$. Wektorami własnymi są $\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-b\\b\end{pmatrix}$ z wartościami własnymi, odpowiednio, 1 i –1. Wielomian charakterystyczny równy jest $\left(\lambda^2-1\right)=(\lambda-1)(\lambda+1)$. Reprezentacja macierzowa odbicia ma postać diagonalną $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ w bazie $\left\{g_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}^e, g_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}^e\right\}$, a wektory własne w tej bazie to $\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$.