Elektrostatyka II

Wykład ten poświęcony jest prawu Gaussa w dwóch różnych, choć równoważnych, postaciach oraz pojęciu potencjału.

Różniczkowe prawo Gaussa

Różniczkowe prawo Gaussa, będące w istocie ogólnym sformułowaniem prawa Coulomba, wyraża równanie

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\, \rho(\vec{r}), \tag{1}$$

gdzie $\vec{E}(\vec{r})$ jest polem elektrycznym, $\rho(\vec{r})$ gęstością ładunku, a różniczkowy operator działający na pole elektryczne to dywergencja. We współrzędnych kartezjańskich działanie dywergencji na dowolne pole wektorowe $\vec{G}(\vec{r})$ zdefiniowane jest następująco

$$\nabla \cdot \vec{G}(\vec{r}) \equiv \frac{\partial G^x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial G^y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial G^z(\vec{r})}{\partial z}, \tag{2}$$

przy czym $\vec{r} = (x, y, z)$ oraz $\vec{G}(\vec{r}) = \Big(G^x(\vec{r}), G^y(\vec{r}), G^z(\vec{r})\Big)$. Widzimy, że w efekcie działania dywergencji wektor przekształcony jest w skalar.

Jeśli dywergencja danego pola znika w całej przestrzeni, to mówimy, że pole jest bezźródłowe. Linie takiego pola nie mają początku ani końca, lecz tworzą zamknięte pętle. Zgodnie z prawem Gaussa (1) pole elektryczne nie jest bezźródłowe – źródłem pola elektrycznego są ładunki. Linie pola „wychodzą” z ładunków dodatnich i „wchodzą” w ładunki ujemne.

Rozwiązując równanie różniczkowe (1) z odpowiednim warunkiem brzegowym, możemy wyznaczyć pole elektryczne wytwarzane przez rozkład ładunku $\rho(\vec{r})$. W wielu zastosowaniach jednak łatwiej to zrobić odwołując się do całkowej postaci prawa Gaussa. Aby ją otrzymać z równania (1) musimy skorzystać z matematycznego twierdzenia Gaussa.

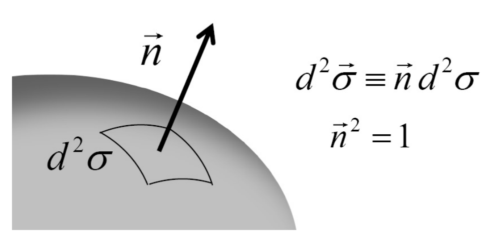
Twierdzenie Gaussa

Twierdzenie Gaussa orzeka, że dla dowolnego pola wektorowego $\vec{G}(\vec{r})$ zachodzi równość

$$\int_V d^3r\, \nabla \cdot \vec{G}(\vec{r}) = \int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{G}(\vec{r}), \tag{3}$$

gdzie V to objętość ograniczona gładką powierzchnią S, a $d^2\vec{\sigma}$ jest zorientowanym elementem powierzchni, czyli, jak pokazuje Rys. 1, elementem powierzchni $d^2\sigma$ pomnożonym przez jednostkowy wektor $\vec{n}$ normalny do powierzchni, tzn. $d^2\vec{\sigma} \equiv \vec{n}\, d^2\sigma$. Wielkość po prawej stronie równania (3) nazywa się strumieniem pola $\vec{G}(\vec{r})$ przez zamkniętą powierzchnię S.

Aby dowieść twierdzenie (3), najpierw zauważamy, że z prawdziwości twierdzenia dla objętości V, wynika prawdziwość dla każdej z dwóch części objętości, gdy V podzielimy na dwa. A jeśli twierdzenie zachodzi dla $V/2$, to zachodzi również



Rysunek 1: Zorientowany element powierzchni

dla $V/4$, itd. Wystarczy więc wykazać prawdziwość twierdzenia dla infinitezymalnie małej objętości w kształcie sześcianu, co osiągamy bezpośrednim rachunkiem.

Całkowe prawo Gaussa

Zastosowawszy twierdzenie (3) do pola elektrycznego, mamy

$$\int_V d^3r\, \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r}), \tag{4}$$

a skorzystawszy teraz z równania (1), otrzymujemy

$$4\pi \int_V d^3r\, \rho(\vec{r}) = \int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r}). \tag{5}$$

Jeśli oznaczymy przez Q_V ładunek znajdujący się w objętości V, czyli

$$Q_V = \int_V d^3r\, \rho(\vec{r}), \tag{6}$$

to równanie (5) prowadzi do poszukiwanego <u>całkowego prawo Gaussa</u>

$$\int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\, Q_V, \tag{7}$$

które wypowiadamy następująco: *strumień pola elektrycznego przez zamkniętą powierzchnię jest równy ładunkowi zamkniętemu wewnątrz tej powierzchni pomnożonemu przez* 4π.

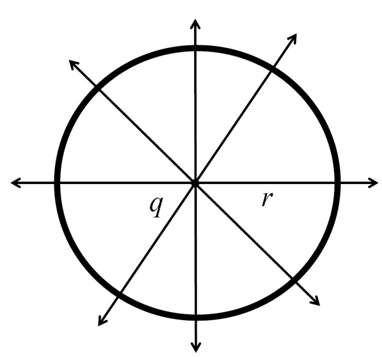
Przykład

Jako przykład zastosowania całkowego prawa Gaussa, rozważmy dodatni ładunek punktowy q umieszczony w początku układu współrzędnych. Problem ma symetrie sferyczną, tzn. pole elektryczne wytwarzane przez ładunek q zależy od odległości od ładunku, lecz nie zależy od kierunku. Piszemy więc $\vec{E}(r)$, nie zaś $\vec{E}(\vec{r})$. Policzmy strumień pola elektrycznego przez powierzchnię sfery o środku w początku układu współrzędnych i promieniu r. W każdym punkcie sfery pole elektryczne jest, jak pokazuje Rys. 2, prostopadłe do jej powierzchni, czyli jest równoległe do wektora normalnego $\vec{n}$ do powierzchni. A zatem

$$\int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \int_S d^2\sigma\, E(r) = E(r) \int_S d^2\sigma = 4\pi r^2 E(r), \tag{8}$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że pole sfery o promieniu r równe jest $4\pi r^2$. Ponieważ ładunek wewnątrz sfery wynosi q, więc prawo Gaussa (7) mówi, że

$$E(r) = \frac{q}{r^2}. \tag{9}$$



Rysunek 2: Punktowy ładunek dodatni q otoczony sferą o promieniu r.

Jeśli uwzględnić orientację wektora pola elektrycznego znajdujemy ostatecznie znany wynik

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{r^2}\,\hat{r}. \tag{10}$$

Potencjał

Jak pamiętamy z pierwszego wykładu, pole elektryczne pochodzące od ciągłego rozkładu ładunku dane jest wzorem

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,')\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}. \tag{11}$$

Pokażemy teraz, że wzór (11) można przekształcić do postaci

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \tag{12}$$

gdzie różniczkowy operator to gradient. We współrzędnych kartezjańskich działanie gradientu na dowolną funkcję skalarną $f(\vec{r})$ zdefiniowane jest następująco

$$\nabla f(\vec{r}) \equiv \left(\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y}, \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z}\right). \tag{13}$$

Widzimy, że w efekcie działania gradientu skalar jest przekształcony w wektor.

Jeśli wektor $\vec{r}$ wyrazić poprzez składowe jako $\vec{r} = (x, y, z)$, to zauważmy, że

$$\nabla\frac{1}{r} = \nabla\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{14}$$

Powyższy wzór łatwo uogólniamy do poszukiwanej postaci, czyli

$$\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}, \tag{15}$$

gdzie gradient działa na składowe wektora $\vec{r}$ nie zaś $\vec{r}\,'$. Podstawiając wzór (15) pod całkę w równaniu (11) dostajemy poszukiwaną formułę (12), wynosząc gradient przed znak całki. Możemy to zrobić, gdyż całkowanie wykonujemy po składowych wektora $\vec{r}\,'$.

Wzór (12) zapisujemy jako

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}), \tag{16}$$

gdzie $\Phi(\vec{r})$ jest potencjałem równym

$$\Phi(\vec{r}) \equiv \int d^3r'\,\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{17}$$

Jeśli pole elektryczne pochodzi od N ładunków punktowych q_i umieszczonych w punktach $\vec{r}_i$ i ma postać

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}, \tag{18}$$

potencjał dany jest wzorem

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}. \tag{19}$$

Łatwo sprawdzić, że pole (18) i potencjał (19) spełniają relacje (16).

Rotacja pola elektrycznego

Rotacja to różniczkowy operator, który działając na pole wektorowe tworzy inne pole, również wektorowe. We współrzędnych kartezjańskich $i-$ta składowa rotacji, działającej na pole wektorowe $\vec{G}(\vec{r})$, dana jest wzorem

$$\left(\nabla \times \vec{G}(\vec{r})\right)^i \equiv \epsilon^{ijk}\, \partial^j\, G^k(\vec{r}), \tag{20}$$

gdzie $\partial^i \equiv \frac{\partial}{\partial r^i}$ zaś ϵ^{ijk} to tensor całkowicie antysymetryczny, taki że $\epsilon^{xyz} = 1$. Antysymetryczność oznacza, że zamiana miejscami każdych dwóch indeksów zmienia znak tensora np. $\epsilon^{zyx} = -\epsilon^{xyz}$. Antysymetryczność sprawia również, że tensor znika, gdy jakikolwiek indeks powtarza się np. $\epsilon^{zzx} = 0$. Dodajmy jeszcze, że we wzorze (20) zastosowaliśmy konwencję sumacyjną, zakładająca sumowanie po powtarzających się indeksach, tutaj po j oraz k.

Z pomocą wzoru (20) łatwo znajdujemy składowe x, y i z rotacji pola $\vec{G}(\vec{r})$ jako

$$\left(\nabla \times \vec{G}(\vec{r})\right)^x \equiv \frac{\partial G^z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial G^y(\vec{r})}{\partial z}, \tag{21}$$

$$\left(\nabla \times \vec{G}(\vec{r})\right)^y \equiv \frac{\partial G^x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial G^z(\vec{r})}{\partial x}, \tag{22}$$

$$\left(\nabla \times \vec{G}(\vec{r})\right)^z \equiv \frac{\partial G^y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial G^x(\vec{r})}{\partial y}. \tag{23}$$

Jeśli rotacja pola wektorowego znika, to mówimy, że pole wektorowe jest bezwirowe. Oznacza to, że linie pola nie tworzą zamkniętych pętli. Okazuje się, że polem bezwirowym jest gradient dowolnej funkcji skalarnej $f(\vec{r})$, gdyż

$$\nabla \times \nabla f(\vec{r}) = 0, \tag{24}$$

co łatwo sprawdzić, korzystając z jawnych wyrażeń (21), (22) i (23).

Prawdziwość relacji (24) jest oczywista, jeśli rotację gradientu zapisać jako

$$\left(\nabla \times \nabla f(\vec{r})\right)^i = \epsilon^{ijk}\, \partial^j \partial^k f(\vec{r}). \tag{25}$$

Mamy tutaj bowiem tzw. zwężenie tensora antysymetrycznego ϵ^{ijk} z symetrycznym $\partial^j\partial^k$. Obliczmy wielkość $S^{ij}A^{ji}$, w której tensor S^{ij} jest symetryczny, tzn. $S^{ij} = S^{ji}$, zaś A^{ij} jest antysymetryczny tzn. $A^{ij} = -A^{ji}$. Wielkość nie ulegnie zmianie, jeśli i zamienimy na j, a j na i. Mamy więc $S^{ij}A^{ji} = S^{ji}A^{ij}$. Teraz korzystamy z faktu, że tensor S^{ij} jest symetryczny, a A^{ij} jest antysymetryczny, co daje $S^{ij}A^{ji} = -S^{ij}A^{ji}$. Tak dochodzimy do wniosku, że $S^{ij}A^{ji}$ znika, bo zero to jedyna liczba równa swojej przeciwnej.

Zgodnie z równaniem (16) pole elektryczne jest minus gradientem potencjału, więc

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0, \tag{26}$$

co oznacza, że w elektrostatyce pole elektryczne jest bezwirowe, linie pola nie są zamkniętymi pętlami. Prawo Gaussa (1) wraz z równaniem (26) tworzą pełny układ równań elektrostatyki.

Równanie Poissona

Podstawiając pole elektryczne wyrażone przez potencjał zgodnie z równaniem (16) do prawa Gaussa (1), znajdujemy równanie

$$\triangle\Phi(\vec{r}) = -4\pi\, \rho(\vec{r}), \tag{27}$$

zwane równaniem Poissona; operator różniczkowy $\triangle$ to laplasjan (od Pierre'a Simona de Laplace'a) dany we współrzędnych kartezjańskich wzorem

$$\triangle = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{28}$$

Interpretacja potencjału

Praca jaką trzeba wykonać przeciwko siłom elektrostatycznym, aby ładunek q przenieść z punktu $\vec{r}_a$ do $\vec{r}_b$, równa jest całce siły po drodze od punktu $\vec{r}_a$ do $\vec{r}_b$, czyli

$$W = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{l} \cdot \vec{F}(\vec{r}). \tag{29}$$

Ponieważ $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$, zaś $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r})$ więc mamy

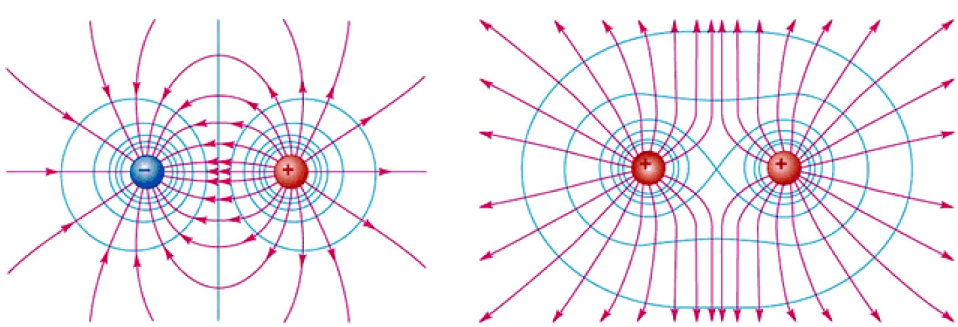
$$W = q\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{l} \cdot \nabla\Phi(\vec{r}) = q\,\Phi(\vec{r})\Big|_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} = q\Big(\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)\Big). \tag{30}$$

A zatem, różnica potencjału pomnożonego przez ładunek w punkcie $\vec{r}_b$ i w punkcie $\vec{r}_a$ jest równa pracy jaką trzeba wykonać przeciwko siłom elektrostatycznym, przenosząc ładunek z punktu $\vec{r}_a$ do $\vec{r}_b$. To właśnie określa fizyczny sens potencjału. Zauważmy przy tym, że wielkość pracy nie zależy od drogi, a jedynie od punktu początkowego i końcowego. A jeśli pracę wykonujemy po zamkniętej drodze, czyli punkt początkowy pokrywa się z końcowym, praca jest zerowa.

Pole elektryczne dane wzorem (16) nie ulega zmianie, jeśli do potencjału dodać dowolną stałą C, ponieważ $\nabla C = 0$. Mówimy więc, że potencjał jest określony z dokładnością do stałej. Można zatem tak dobrać tę stałą, aby potencjał znikał w nieskończoności. Wówczas potencjał w punkcie $\vec{r}$ pomnożony przez ładunek ma sens pracy jaką wykonujemy przenosząc ten ładunek z nieskończoności do punktu $\vec{r}$.

Powierzchnia ekwipotencjalna

Powierzchnia ekwipotencjalna to powierzchnia, na której potencjał wytwarzany przez dany układ ładunków, przyjmuje stałą wartość. Linie pola (określone przez gradient potencjału), przechodzące przez powierzchnię ekwipotencjalną, są do niej prostopadłe. Dwa przykłady powierzchni ekwipotencjalnych i linii pola przedstawia rysunek 3. Dodajmy jeszcze, że praca przy przemieszczaniu ładunku po powierzchni ekwipotencjalnej jest zerowa.



Rysunek 3: Linie pola (kolor bordowy) i powierzchnie ekwipotencjalne (kolor niebieski) w przypadku dwóch par ładunków $-+$ (po lewej stronie) oraz $++$ (po prawej stronie).

Równania elektrostatyki

Podsumujmy wykład stwierdzeniem, że prawo Gaussa (1) oraz równanie (26), czyli

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\, \rho(\vec{r}), \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0, \end{cases} \tag{31}$$

tworzą zupełny układ równań elektrostatyki w próżni.