Układ cząstek i pól

Rozważymy układ cząstek naładowanych oddziaływających z polem elektromagnetycznym, co pozwoli nam określić energię pola oraz prześledzić jak energia przepływa, o czym mówi twierdzenie Poytinga. Następnie zajmiemy się pędem pola elektromagnetycznego.

Pojedyncza cząstka w polu elektromagnetycznym

Na cząstkę o ładunku q i prędkości $\vec{v}$, znajdującej się w chwili t w punkcie $\vec{r}$ działa siła $\vec{F}$ spowodowana występowaniem pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$. Siła ta wynosi

$$\vec{F}(t,\vec{r}) = q\Big(\vec{E}(t,\vec{r}\,) + \frac{1}{c}\vec{v}(t) \times \vec{B}(t,\vec{r}\,)\Big), \tag{1}$$

a równanie wyrażające drugą zasadę dynamiki wygląda następująco

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = q\Big(\vec{E}(t,\vec{r}\,) + \frac{1}{c}\vec{v}(t) \times \vec{B}(t,\vec{r}\,)\Big), \tag{2}$$

gdzie $\vec{p}$ jest pędem cząstki.

Ponieważ przesunięcie cząstki w infinitezymalnie krótkim czasie dt równe jest $\vec{v}dt$, więc pracę jaką pole elektromagnetyczne wykonuje nad cząstką w tym czasie znajdujemy jako

$$dW = \vec{F}(t,\vec{r}) \cdot \vec{v}(t)dt = q\Big(\vec{E}(t,\vec{r}\,) + \frac{1}{c}\vec{v}(t) \times \vec{B}(t,\vec{r}\,)\Big) \cdot \vec{v}(t)dt = q\vec{E}(t,\vec{r}\,) \cdot \vec{v}(t)dt, \tag{3}$$

gdzie uwzględniliśmy, że $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$, gdyż wektor $\vec{v} \times \vec{B}$ jest prostopadły do $\vec{v}$. Tak doszliśmy do ważnego wniosku, że <u>pole magnetyczne nie wykonuje pracy</u>, ponieważ siła jest prostopadła do przesunięcia.

Moc to pochodna pracy po czasie, więc moc pola elektromagnetycznego działającego na cząstkę wynosi

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{E}(t,\vec{r}\,) \cdot \vec{v}. \tag{4}$$

Energia układu cząstek i pól

Jeśli jedną cząstkę o ładunku q zastąpimy zbiorem cząstek o gęstości ładunku $\rho(t,\vec{r}\,)$, wówczas ładunek cząstek zgromadzonych wokół punktu $\vec{r}$ równy jest $\rho(t,\vec{r}\,)d^3r$. Moc pola elektromagnetycznego działającego na te cząstki otrzymujemy ze wzoru (4) jako

$$\frac{dW}{dt} = \int d^3r\, \vec{E}(t,\vec{r}\,) \cdot \vec{j}(t,\vec{r}\,), \tag{5}$$

gdyż $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Jeśli skorzystamy ze zmodyfikowanego prawa Ampère'a, czyli czwartego równania Maxwella

$$\nabla \times \vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(t,\vec{r}) + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t}, \tag{6}$$

i prąd wynoszący

$$\vec{j}(t,\vec{r}) = \frac{c}{4\pi}\nabla \times \vec{B}(t,\vec{r}) - \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t}, \tag{7}$$

wstawimy pod całkę (5), znajdujemy

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int d^3r\left(c\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} - \vec{E} \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right), \tag{8}$$

gdzie dla uproszczenia zapisu pominęliśmy argumenty pól.

Wykorzystamy teraz łatwą do udowodnienia tożsamość, zachodząca dla dowolnych pól wektorowych $\vec{G}$ i $\vec{H}$:

$$\nabla \cdot (\vec{G} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{G} - \vec{G} \cdot \nabla \times \vec{H}, \tag{9}$$

dzięki której możemy zapisać $\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B}$ jako

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} + \nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{E}), \tag{10}$$

co podstawione do równania (8) daje

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \left(c\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} + c\nabla \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \tag{11}$$

Dzięki prawu Faradaya

$$\nabla \times \vec{E}(t, \vec{r}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{r})}{\partial t}, \tag{12}$$

pierwszy wyraz pod całką (11) przekształcamy, otrzymując

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r \left(c\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right), \tag{13}$$

gdzie zmieniliśmy jeszcze $\vec{B} \times \vec{E}$ na $-\vec{E} \times \vec{B}$.

Równość wyjściowego wyrażenia na moc (5) i końcowego (13) zapisujemy jako jedną znikająca całkę

$$\int d^3r \left[\vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \left(c\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right] = 0. \tag{14}$$

Ponieważ obszar całkowania jest dowolny, znikanie całki wymaga, aby funkcja podcałkowa była zerowa, a zatem

$$\frac{1}{4\pi} \left(c\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\vec{E} \cdot \vec{j}. \tag{15}$$

Równość (15) zwaną twierdzeniem Poytinga zapisujemy jako

$$\frac{\partial u(t, \vec{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S}(t, \vec{r}) = -\vec{E}(t, \vec{r}) \cdot \vec{j}(t, \vec{r}), \tag{16}$$

gdzie

$$u(t, \vec{r}) \equiv \frac{1}{8\pi} \left(\vec{E}^2(t, \vec{r}) + \vec{B}^2(t, \vec{r}) \right) \tag{17}$$

jest gęstością energii pola elektromagnetycznego, zaś

$$\vec{S}(t, \vec{r}) \equiv \frac{c}{4\pi} \left(\vec{E}(t, \vec{r}) \times \vec{B}(t, \vec{r}) \right) \tag{18}$$

jest gęstością strumienia energii pola elektromagnetycznego zwaną też wektorem Poytinga.

Jeśli w układzie nieobecne są cząstki naładowane lub, co równoważne, nie płynie prąd elektryczny, twierdzenie Poytinga (16) przybiera postać równania ciągłości, analogicznego to tego, które spełniane jest przez gęstości ładunku i prądu. Energia więc może wpływać w dany obszar lub wypływać z niego, nie może natomiast zanikać ani być generowana.

W obecności cząstek naładowanych sytuacja ulega zmianie – poza przepływem, energia może być przekazywana cząstkom bądź od nich odbierana. Pominąwszy przepływ energii reprezentowany przez wektor $\vec{S}$, równanie (16) pokazuje, że pochodna czasowa gęstości energii pola jest ujemna – gęstość energii maleje, jeśli prąd $\vec{j}$ jest skierowany zgodnie z polem elektrycznym $\vec{E}$. Cząstki są wówczas przyspieszane przez pole elektryczne, więc energia pola jest przekazywana cząstkom. Jeśli prąd $\vec{j}$ jest skierowany przeciwnie do pola elektrycznego $\vec{E}$. Cząstki są wówczas hamowane przez pole elektryczne, więc ich energia zamienia się w energię pola i gęstość energii pola wzrasta.

Twierdzenie Poyntinga w ośrodku

Wyprowadzenie twierdzenia Poyntinga w przypadku ośrodka materialnego wygląda bardzo podobnie, korzystać jedynie trzeba z równań Maxwella spełnianych w ośrodku nie zaś w próżni. Ostatecznie znajdujemy

$$\frac{\partial u(t,\vec{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S}(t,\vec{r}) = -\vec{E}(t,\vec{r}) \cdot \vec{j}(t,\vec{r}), \tag{19}$$

gdzie

$$u(t,\vec{r}) \equiv \frac{1}{8\pi}\Big(\vec{E}(t,\vec{r}) \cdot \vec{D}(t,\vec{r}) + \vec{B}(t,\vec{r}) \cdot \vec{H}(t,\vec{r})\Big) \tag{20}$$

$$\vec{S}(t,\vec{r}) \equiv \frac{c}{4\pi}\Big(\vec{E}(t,\vec{r}) \times \vec{H}(t,\vec{r})\Big). \tag{21}$$

Pęd układu cząstek i pól

Jeśli jedną cząstkę o ładunku q zastąpimy zbiorem cząstek o gęstości ładunku $\rho(t,\vec{r}\,)$, równanie (2) przybiera postać

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \int d^3r \Big(\rho(t,\vec{r}\,)\vec{E}(t,\vec{r}\,) + \frac{1}{c}\vec{j}(t,\vec{r}\,) \times \vec{B}(t,\vec{r}\,)\Big), \tag{22}$$

gdzie $\vec{P}$ pędem cząstek. Korzystamy teraz z prawa Gaussa, przy czym ponownie wracamy do elektrodynamiki w próżni, więc prawo to ma postać

$$\nabla \cdot \vec{E}(t,\vec{r}) = 4\pi\, \rho(t,\vec{r}). \tag{23}$$

Wyrażamy gęstość ładunku jako

$$\rho(t,\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\, \nabla \cdot \vec{E}(t,\vec{r}), \tag{24}$$

zaś gęstość prądu zgodnie ze wzorem (7), wynikającym ze zmodyfikowanego prawa Ampère'a, czyli czwartego równania Maxwella. Podstawiwszy ρ i $\vec{j}$ pod całkę w równaniu (22), znajdujemy

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int d^3r \bigg((\nabla \cdot \vec{E})\, \vec{E} + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \bigg), \tag{25}$$

gdzie ponownie pominęliśmy argumenty pól dla uproszczenia zapisu.

Ostatni człon pod całką (25) przekształcamy następująco

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial(\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{26}$$

Skorzystawszy z prawa Faradaya

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{27}$$

by przedstawić pochodną czasową pola $\vec{B}$ jako $-c\nabla \times \vec{E}$, wyrażenie (26) przybiera postać

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} = \frac{\partial(\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} + c\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}), \tag{28}$$

która podstawiona pod całkę (25) prowadzi do wyniku

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \Big((\nabla \cdot \vec{E})\, \vec{E} + (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} + (\nabla \cdot \vec{B})\, \vec{B} + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial(\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} \Big), \tag{29}$$

gdzie uwzględniliśmy jeszcze równość $(\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} = -\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$. Ponadto dołożony jeszcze został pod całkę człon $(\nabla \cdot \vec{B})\, \vec{B}$, który faktycznie znika, bo pole magnetyczne jest bezźródłowe i $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Chodzi o to, aby człony z polem elektrycznym były tej samej postaci co człony z polem magnetycznym.

Przechodząc do notacji wskaźnikowej łatwo sprawdzić, że

$$\Big((\nabla \cdot \vec{E})\, \vec{E} + (\nabla \times \vec{E}) \times \vec{E} \Big)^i = \partial^j \Big(E^i E^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} E^k E^k \Big), \tag{30}$$

co sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem, korzystając teraz z tożsamości

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{lmk} = \delta^{il} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jl}. \tag{31}$$

Uwzględniwszy zachodzenie analogicznej równości dla pola $\vec{B}$, wprowadzamy <u>tensor napięć Maxwella</u>

$$T^{ij} \equiv \frac{1}{4\pi} \Big(E^i E^j + B^i B^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} (E^k E^k + B^k B^k) \Big), \tag{32}$$

dzięki któremu równanie (25) zapisujemy jako

$$\frac{dP^i(t)}{dt} = \int d^3r \Big(\partial^j T^{ij} - \frac{\partial g^i}{\partial t} \Big), \tag{33}$$

gdzie wektor $\vec{g}$ dany jest wzorem

$$\vec{g}(t, \vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi c} \Big(\vec{E}(t, \vec{r}) \times \vec{B}(t, \vec{r}) \Big). \tag{34}$$

Widzimy, że wektor $\vec{g}$ różni się jedynie o czynnik c^2 od wektora Poyntinga (18), tzn. $\vec{S} = c^2 \vec{g}$.

Pokażemy teraz, że wektor g^i jest <u>gęstością pędu pola elektromagnetycznego</u> zaś tensor $-T^{ij}$ <u>gęstością strumienia pędu pola</u>. Zauważmy na początek, że zgodnie z równaniem (33) całka objętościowa z wektora g^i ma wymiar pędu, więc g^i ma wymiar gęstości pędu. Jeśli gęstości ładunku i prądu znikają wówczas, jako pokazuje (25), mamy

$$\int d^3r \Big(\partial^j T^{ij} - \frac{\partial g^i}{\partial t} \Big) = 0. \tag{35}$$

Ponieważ obszar całkowania możemy wybrać dowolnie, więc znikanie całki wymaga znikania funkcji podcałkowej. A zatem otrzymujemy równanie

$$\frac{\partial g^i}{\partial t} - \partial^j T^{ij} = 0, \tag{36}$$

które jest równaniem ciągłości w notacji wskaźnikowej. Stwierdzamy, że całka objętościowa z wektora g^i po całej przestrzeni reprezentuje wielkość, która w nieobecności ładunków i prądów jest zachowywana. Uzasadnia to nazywanie wektora g^i gęstością pędu pola elektromagnetycznego, a tensora $-T^{ij}$ gęstością strumienia pędu pola.

Gdy w układzie występują cząstki naładowane, pęd pola elektromagnetycznego nie jest wielkością zachowywaną, gdyż pęd ten może być przekazywany cząstkom lub im odbierany. Można natomiast wykazać, że całkowity pęd układu cząstek i pól jest zachowywany, jeśli uwzględnić dynamikę cząstek.