Pola zmienne w czasie

Nauka o elektryczności rozwijała się początkowo zupełnie niezależnie od wiedzy o magnetyzmie. Rzeczywiście, trudno było dojrzeć związek między elektryzowaniem się bursztynu, a zachowaniem igły magnetycznej. Odkrycie Hansa Christiana Oersteda z roku 1820, że prąd elektryczny wytwarza pole magnetyczne, związek ujawniło, lecz elektrostatyka i magnetostatyka wciąż stanowią niemal rozłączne domeny fizyki. Dopiero zmienność w czasie pól, ładunków, prądów ukazuje nierozerwalny charakter elektryczności i magnetyzmu. Wykład ten o polach zmieniających się z upływem czasu jest więc centralną i najważniejszą częścią całego kursu.

Prawo Faradaya

Odkrycie Oersteda sprowokowało następujące pytanie: skoro prąd elektryczny wytwarza pole magnetyczne, jak z pomocą pola magnetycznego wytworzyć prąd elektryczny. Odpowiedzi udzielił genialny angielski eksperymentator Michael Faraday, odkrywając w 1831 roku prawo indukcji elektromagnetycznej. We współczesnym sformułowaniu wyraża je całkowa relacja

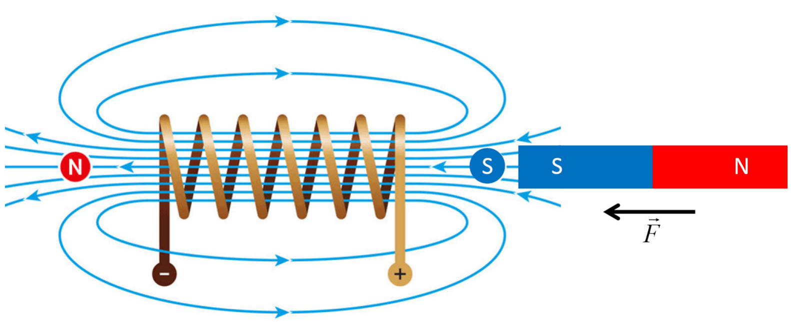
$$\int_C d\vec{l} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{B}(t, \vec{r}), \tag{1}$$

mówiąca, że *krążenie pola elektrycznego wzdłuż zorientowanej zamkniętej krzywej C jest równe pochodnej czasowej z przeciwnym znakiem strumienia pola magnetycznego przez powierzchnię S, której brzegiem jest pętla C*. Przyjęty układ jednostek CGS powoduje pojawienie się czynnika $1/c$, który jest nieobecny w układzie SI.

Relacja (1) nic nie mówi o wspomnianym wytwarzaniu prądu elektrycznego z pomocą pola magnetycznego. Aby zrozumieć, jak się rzecz ma z prądem, wyobraźmy sobie cienki przewodnik, tworzący zamkniętą pętlę C, który umieszczamy w polu magnetycznym. Jeśli pole zmienia się z upływem czasu, to pochodna czasowa strumienia pola przez powierzchnię S wyznaczoną pętlą C jest niezerowa, a zatem i krążenie pola elektrycznego wzdłuż krzywej C jest, zgodnie z prawem Faradaya (1), różne od zera. Pole to działając na ładunki obecne w przewodniku wprawi je w ruch, wywołując przepływ prądu elektrycznego.

Zgonie z tradycją krążenie pola elektrycznego występujące po lewej stronie prawa Faradaya (1) nazywane jest siłą elektromotoryczną, choć termin ten jest mylący. Pamiętając bowiem, że siła $\vec{F} = q\vec{E}$, gdzie q jest ładunkiem, stwierdzamy, że krążenie pola elektrycznego jest pracą wykonaną wzdłuż pętli C, a zatem i energią, podzieloną przez ładunek.

Należy zwrócić uwagę na znak minus w równaniu (1), który wynika z tzw. reguły Lenza zwanej też regułą sprzeciwu lub przekory. Wyobraźmy sobie solenoid, w który wsuwamy i wysuwamy magnes sztabkowy pokazany na Rys. 1. Strumień pola magnetycznego przez powierzchnię



Rysunek 1: Powstawanie prądu i reguła Lenza

każdego zwoju solenoidu zmienia się, więc w obwodzie powstaje prąd, którego kierunek odwraca się zgodnie z rytmem wsuwania i wysuwania magnesu. Reguła Lenza orzeka, że kierunek prądu powstającego w solenoidzie jest taki, że pole magnetyczne solenoidu wypycha wsuwany magnes, jak pokazano na Rys. 1, i przyciąga wysuwany. Powstawanie więc siły elektromotorycznej wiążę się z wykonywaniem pracy. Gdyby zmienić znak w równaniu (1), wytarzanie prądu elektrycznego nie kosztowało by pracy.

Równanie (1) wyraża prawo Faradaya w postaci całkowej. Różniczkową postać tego prawa znajdujemy, jeśli do lewej strony równania (1) zastosujemy twierdzenie Stokesa, mówiące, że

$$\int_C d\vec{l} \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = \int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \nabla \times \vec{E}(t, \vec{r}). \tag{2}$$

Wówczas otrzymujemy równość

$$\int_S d^2\vec{\sigma} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}(t, \vec{r}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{r})}{\partial t} \right) = 0. \tag{3}$$

Ponieważ powierzchnia S jest dowolna, znikanie całki wymaga, aby

$$\nabla \times \vec{E}(t, \vec{r}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{r})}{\partial t}, \tag{4}$$

co jest różniczkową postacią prawo Faradaya.

Jak pamiętamy, w elektrostatyce $\nabla \times \vec{E} = 0$, co oznacza, że niezależne od czasu pole elektryczne jest bezwirowe – linie pola nie tworzą zamkniętych pętli. Dopuszczenie zależności pola od czasu zmieniło jego charakter – pole elektryczne stało się wirowe, a wirowość określa zmienność pola magnetycznego. Zwróćmy też uwagę na nieobecne w elektrostatyce zjawisko: zmienne pole magnetyczne wytwarza zmienne pole elektryczne. Pola elektryczne i magnetyczne nie są więc od siebie niezależne.

Równania Maxwella

Zbierzmy poznane dotychczas prawa elektromagnetyzmu w próżni

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{r}) = 4\pi\, \rho(t, \vec{r}), \\ \nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{r}) = 0, \\ \nabla \times \vec{E}(t, \vec{r}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{r})}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{B}(t, \vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\, \vec{j}(t, \vec{r}) + \vec{\text{coś}}, \end{cases} \tag{5}$$

gdzie dopuściliśmy zależność od czasu pól, ładunków i prądów, a prawo Ampère'a zmodyfikowaliśmy dopisując „$\vec{\text{coś}}$”, gdyż wersja tego prawa znana z magnetostatyki jest nie do utrzymania. Obliczywszy bowiem dywergencję obu stron równania wyrażającego prawo Ampère'a, znajdujemy $\nabla \cdot \vec{j}(t, \vec{r}) = 0$, bo dywergencja rotacji pola wektorowego znika. A jak pamiętamy z Wykładu V, zachowanie ładunku wymaga spełnienia równania ciągłości

$$\frac{\partial \rho(t, \vec{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}(t, \vec{r}) = 0. \tag{6}$$

Aby pogodzić prawo Ampère'a z zasadą zachowania ładunku, musi być spełniony warunek

$$\nabla \cdot \vec{\text{coś}} = \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho(t, \vec{r})}{\partial t}. \tag{7}$$

Zauważmy, że jeśli weźmiemy pochodną czasową obu stron równania wyrażającego prawo Gaussa i dodatkowo podzielimy obie strony przez c, to prawa strona tego równania równa jest wyrażeniu (7). Tak więc znajdujemy

$$\vec{\text{coś}} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t}. \tag{8}$$

Przedstawiona modyfikacja prawa Ampère'a jest odkryciem Jamesa Clerka Maxwella dokonanym w latach 1861-1862. Doprowadziło ono do syntezy praw elektromagnetyzmu, które współcześnie zapisujemy jako <u>cztery równania Maxwella</u>:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E}(t,\vec{r}) = 4\pi\,\rho(t,\vec{r}), \\ \nabla \cdot \vec{B}(t,\vec{r}) = 0, \\ \nabla \times \vec{E}(t,\vec{r}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{B}(t,\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(t,\vec{r}) + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{E}(t,\vec{r})}{\partial t}. \end{cases} \tag{9}$$

Każde z równań ma prosty i głęboki jednocześnie sens fizyczny.

- Pierwsze równanie, zwane prawem Gaussa, mówi, że źródłem pola elektrycznego są ładunki elektryczne.
- Drugie równanie orzeka, że nie ma ładunków magnetycznych, czyli monopoli magnetycznych, co sprawia, że pole magnetyczne jest bezźródłowe.
- Zgodnie z trzecim równaniem, zwanym prawem Faradaya, zmienne pole magnetyczne wytwarza zmienne pole elektryczne. W nieobecności zmiennego pola magnetycznego pole elektryczne jest bezwirowe.
- Czwarte równanie, zwane zmodyfikowanym prawem Ampère'a, mówi, że pole magnetyczne wytwarzane jest przez prąd elektryczny i zmienne w czasie pole elektryczne.

Stwierdzamy również, że prawo zachowania ładunku wyrażone równaniem ciągłości (6) nie jest dodatkową zasadą, lecz konsekwencją pierwszego i czwartego równań Maxwella.

Równania Maxwella w ośrodku

Jeśli sceną opisywanych zjawisk elektromagnetycznych jest nie próżnia, lecz ośrodek materialny, pierwsze i czwarte równanie Maxwella, w których występują gęstości ładunku i prądu, wymagają modyfikacji. W równaniach tych pola $\vec{E}$ i $\vec{B}$ zastępujemy znanymi już polami $\vec{D}$ i $\vec{H}$, a zatem równania Maxwella wyglądają następująco

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D}(t,\vec{r}) = 4\pi\,\rho(t,\vec{r}), \\ \nabla \cdot \vec{B}(t,\vec{r}) = 0, \\ \nabla \times \vec{E}(t,\vec{r}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(t,\vec{r})}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H}(t,\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(t,\vec{r}) + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{D}(t,\vec{r})}{\partial t}. \end{cases} \tag{10}$$

Aby powyższe równania miały jednoznaczne rozwiązania, muszą być uzupełnione o związki materiałowe, określające relacje między $\vec{E}$ i $\vec{D}$ oraz $\vec{B}$ i $\vec{H}$. W najprostszej swej postaci związki materiałowe są takie jak te już wprowadzone w kontekście elektrostatyki i magnetostatyki, czyli

$$\vec{D}(t,\vec{r}) = \varepsilon\,\vec{E}(t,\vec{r}), \qquad \vec{B}(t,\vec{r}) = \mu\,\vec{H}(t,\vec{r}), \tag{11}$$

gdzie ε i μ są przenikliwościami, odpowiednio, elektryczną i magnetyczną.

Potencjały

Jak pamiętamy, dzięki wyrażeniu elektrostatycznego pola $\vec{E}$ przez potencjał skalarny Φ, czyli $\vec{E} = -\nabla\Phi$, jedno z dwóch równań elektrostatyki tzn. $\nabla \times \vec{E} = 0$ jest rozwiązane automatycznie. Podobnie się rzecz ma w magnetostatyce. Wyrażając indukcję magnetyczną $\vec{B}$ przez potencjał wektorowy $\vec{A}$ jako $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, równanie $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ jest spełnione bez żadnych dodatkowych warunków.

Naszym zamiarem jest takie wyrażenie pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$, aby drugie i trzecie równanie Maxwella (9) było automatycznie spełnione. Równanie drugie, wyrażające bezźródłowość pola magnetycznego, jak takie samo jak w magnetostatyce, więc

$$\vec{B}(t,\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(t,\vec{r}). \tag{12}$$

Natomiast wyrażenie pola elektrycznego poprzez potencjał musimy zmodyfikować do postaci

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = -\nabla\Phi(t,\vec{r}) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(t,\vec{r})}{\partial t}. \tag{13}$$

Łatwo się przekonać, że podstawiając pola $\vec{E}$ i $\vec{B}$ w postaci, odpowiednio, (13) i (12) do trzeciego równania Maxwella (9), wyrażającego prawo Faradaya, równanie to jest automatycznie spełnione.

Jeśli pole elektryczne w postaci (13) podstawić do pierwszego równania Maxwella (9), wyrażającego prawo Gaussa, a pole magnetyczne (12) do czwartego równania Maxwella (9), będącego zmodyfikowanym prawe Ampère'a, znajdujemy

$$-\Delta\Phi(t,\vec{r}) - \frac{1}{c}\nabla\cdot\dot{\vec{A}}(t,\vec{r}) \;=\; 4\pi\rho(t,\vec{r}), \tag{14}$$

$$-\Delta\vec{A}(t,\vec{r}) + \nabla\Big(\nabla\cdot\vec{A}(t,\vec{r})\Big) \;=\; \frac{4\pi}{c}\vec{j}(t,\vec{r}) - \frac{1}{c}\Big(\nabla\dot{\Phi}(t,\vec{r}) + \frac{1}{c}\ddot{\vec{A}}(t,\vec{r})\Big), \tag{15}$$

gdzie z pomocą kropki oznaczamy pochodną czasową. Otrzymane równania mają dosyć skomplikowaną postać, lecz można je znacząco uprościć, odpowiednio wybierając cechowanie.

Swoboda wyboru cechowania

Zauważmy, że jeśli zamienimy potencjały $\vec{A}$ i Φ and $\vec{A}'$ i Φ', takie że

$$\vec{A}(t,\vec{r}) \to \vec{A}'(t,\vec{r}) \;=\; \vec{A}(t,\vec{r}) + \nabla\Lambda(t,\vec{r}), \tag{16}$$

$$\Phi(t,\vec{r}) \to \Phi'(t,\vec{r}) \;=\; \Phi(t,\vec{r}) - \frac{1}{c}\dot{\Lambda}(t,\vec{r}), \tag{17}$$

gdzie $\Lambda(t,\vec{r})$ jest dowolną funkcją, to pola magnetyczne (12) i elektryczne (13) nie ulegną zmianie. Taką sytuację, z którą w uproszczonej postaci spotkaliśmy się już w elektrostatyce i magnetostatyce, określa się jako swoboda wyboru cechowania. Mówimy też o niezmienniczości lub symetrii elektrodynamiki przy transformacji danej wzorami (16) i (17), zwanej transformacją cechowania.

Dzięki tej swobodzie wyboru cechowania można nakładać pewne dodatkowe warunki na potencjały, co pozwala znacząco uprościć rozliczne zagadnienia, w szczególności równania (14) i (15) określające potencjały.

Powtórzmy jeszcze uwagi dotyczące symetrii elektrodynamiki przy transformacjach cechowania sformułowane w Wykładzie V. Są one bowiem fundamentalnej wagi. Dzięki twierdzeniu Noether prawo zachowania ładunku można traktować jako skutek tej symetrii. Ponadto niezmienniczość teorii przy transformacjach cechowania określa sposób w jaki ładunki, w szczególności elektrony, oddziałują z polem elektromagnetycznym.

Wszystkie oddziaływania występujące w mikroświecie, a więc siły słabe, elektromagnetyczne i silne, są opisywane przez teorie z symetrią cechowania, choć bardziej złożoną niż ta wyrażona wzorami (16) i (17). Również Ogólna Teoria Względności, czyli relatywistyczna teoria grawitacji ma podobny charakter, choć tutaj odpowiednikiem transformacji cechowania są transformacje między układami współrzędnych, które, oczywiście, nie mogą zmieniać praw fizyki. Zrozumienie kluczowej roli symetrii cechowania umożliwiło sformułowanie tych teorii opisujących Wszechświat w skali mikroskopowej i makroskopowej.

Cechowanie Lorentza

Ponieważ, jak już wspominaliśmy, występuje pewna swoboda określenia potencjałów, która nie ma jednak wypływu no fizyczne pola $\vec{E}$ i $\vec{B}$, więc na potencjały możemy nałożyć dodatkowe warunki – zwane warunkami cechowania, upraszające analizę rozważanego problemu.

Jeśli przyjąć warunek cechowania Lorentza

$$\nabla \cdot \vec{A}(t,\vec{r}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi(t,\vec{r})}{\partial t} = 0, \tag{18}$$

równania spełniane przez potencjały (14) i (15) upraszczają się do postaci

$$\begin{aligned} \Box \Phi(t,\vec{r}) &= -4\pi\rho(t,\vec{r}), & (19) \\ \Box \vec{A}(t,\vec{r}) &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(t,\vec{r}), & (20) \end{aligned}$$

gdzie $\Box$ jest różniczkowym operatorem nazywanym *dalambertianem* (od nazwiska wybitnego francuskiego matematyka i fizyka Jeana d'Alemberta), definiowanym jako

$$\Box \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{21}$$

Widzimy, że równania (19) and (20) mają taką samą postać i nie „mieszają" potencjałów Φ i $\vec{A}$, więc mogą być rozwiązywane niezależnie po siebie.

Jeśli potencjały Φ i $\vec{A}$ nie spełniają warunku Lorentza (18), lecz

$$\nabla \cdot \vec{A}(t,\vec{r}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi(t,\vec{r})}{\partial t} = C(t,\vec{r}) \neq 0, \tag{22}$$

wówczas można wykonać transformację cechowania (16) i (17) z funkcją $\Lambda(t,\vec{r})$, która jest rozwiązaniem równania

$$\Box \Lambda(t,\vec{r}) = -C(t,\vec{r}). \tag{23}$$

Przetransformowane potencjały Φ' i $\vec{A}'$ spełniają wtedy już warunek Lorentza (18).

Cechowanie Coulomba

Często stosowany jest warunek cechowania Coulomba

$$\nabla \cdot \vec{A}(t,\vec{r}) = 0, \tag{24}$$

przy którym równania spełniane przez potencjały (14) and (15) przybierają postać

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(t,\vec{r}) &= -4\pi\rho(t,\vec{r}), & (25) \\ \Box \vec{A}(t,\vec{r}) &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(t,\vec{r}) - \frac{1}{c}\nabla\dot{\Phi}(t,\vec{r}). & (26) \end{aligned}$$

Użyteczność cechowania Coulomba jest związana z faktem, że równanie na Φ jest takie jak w elektrostatyce i znamy jego ogólną postać

$$\Phi(t,\vec{r}) = \int d^3r' \, \frac{\rho(t,\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}. \tag{27}$$

Zostaje więc do rozwiązania równanie na $\vec{A}$, do którego wchodzi pochodna czasowa Φ.

Kolejne wykłady będą poświęcone dalszej analizie równań Maxwella, których najważniejszą konsekwencją jest istnienie fal elektromagnetycznych. A ponieważ światło jest taką falą, więc elektrodynamika obejmuje swym władaniem nie tylko elektryczność i magnetyzm, lecz również optykę.