Wykład VI Fizyka cząstek elementarnych

Izospin, symetria izospinowa i zachowanie izospinu

Nukleony

- Proton jest bardzo podobny do neutronu - obie cząstki mają spin $\frac{\hbar}{2}$, niosą liczbę barionową $B=1$, a ich masy wynoszące $m_p = 938{,}3$ MeV i $m_n = 939{,}6$ MeV są niemal identyczne. Różnią się natomiast ładunkiem elektrycznym. Przyjmuje się więc, że z punktu widzenia oddziaływań silnych proton i neutronu jest taką samą cząstką, a różnice wynikają z obecności sił elektromagnetycznych.

- Energia elektromagnetyczna $E_{\mathrm{EM}}=\frac{e^2}{r}$ na odległości $r = 1$ fm odpowiadającej rozmiarom nukleonu wynosi 1,4 MeV, co bliskie jest różnicy masy neutronu i protonu, $m_n - m_p = 939{,}6 - 938{,}3 = 1{,}3$MeV i sugeruje elektromagnetyczne pochodzenie owej różnicy.

- Podobieństwo protonu i neutronu potwierdzają bardzo zbliżone własności par jąder takich jak ^{3}H i ^{3}He oraz ^{11}B i ^{11}C, w których liczba neutronów jednego jądra równa jest liczbie protonów drugiego jądra i odwrotnie. ^{3}H to $p+2n$ zaś ^{3}H to $2p+n$, natomiast ^{11}B to $5p+6n$, a ^{11}C to $6p+5n$. Pary takich jąder nazywa się izotopowo zwierciadlanymi.

- Skoro proton i neutron są dwoma stanami tej samej cząstki - nukleonu, to można wprowadzić liczbę kwantową analogiczną do spinu zwaną izospinem (początkowo mówiono o spinie izotopowym) oznaczaną literą *I*, która skladowa pozwoli odróżniać proton od neutronu. W przypadku nukleonu przyjmujemy, że wartość izospinu wynosi $I=\frac{1}{2}$, a trzecia składowa izospinu równa jest $I_3=\frac{1}{2}$ dla protonu i $I_3=-\frac{1}{2}$ dla neutronu.

- Na podobieństwo spinowej funkcji falowej elektronu, wprowadzamy izospinową dwukomponentową funkcję falową nukleonu, taką że

$$\psi_p = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \psi_n = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Wykład VI cd. Fizyka cząstek elementarnych

- Dalej kierując się analogią ze spinem, wprowadzamy wektorowy operator izospinu $\mathbf{I} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$, w którym wektor $\boldsymbol{\sigma}$ tworzą trzy hermitowskie macierze Pauliego $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ zdefiniowane następująco:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Widzimy, że funkcje falowe ψ_p i ψ_n są faktycznie wektorami własnymi operatora I_3 z wartościami własnymi $\frac{1}{2}$ oraz $-\frac{1}{2}$.

- Dowolny stan nukleonu N zapisujemy jako

$$\psi_N = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

  przy czym współczynniki α, β ogranicza warunek normalizacji

$$\psi_N^+ \psi_N = 1 \quad \Rightarrow \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

  gdzie + oznacza sprzężenie hermitowskie, czyli sprzężenie zespolone i transpozycję.

- Działając unitarną macierzą U możemy przekształcić funkcję falową nukleonu ψ_N w dowolną inną funkcję falową $\tilde{\psi}_N$ tzn. $\tilde{\psi}_N = U\psi_N$, a warunek unormowania nie zostanie naruszony, czyli

$$\tilde{\psi}_N^+ \tilde{\psi}_N = \psi_N^+ U^+ U \psi_N = \psi_N^+ \psi_N = 1.$$

  Jak pamiętamy macierz U jest unitarna, gdy zachodzi $U^+ U = UU^+ = 1$.

- W szczególności macierz unitarna σ_1 przekształca ψ_p w ψ_n i odwrotnie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Zbiór macierzy unitarnych o wymiarze 2×2 tworzy <u>grupę</u> oznaczaną jako $U(2)$. Jeśli pominąć mnożenie macierzy przez liczbę o module 1, czyli przez czynnik fazowy $e^{i\varphi}$, gdzie φ jest rzeczywiste, to wspomniane macierze tworzą grupę $SU(2)$, czyli macierzy unitarnych 2×2 o wyznaczniku 1.

<u>Wykład VI cd.</u> Fizyka cząstek elementarnych

- Warto pamiętać, że wyznacznik macierzy unitarnej jest liczbą zespoloną o module 1, co dowodzi się następująco
$$U^{+}U=1 \quad \Rightarrow \quad \det[U^{+}U]=\det U^{+}\det U=1 \quad \Rightarrow \quad (\det U)^{*}\det U=1.$$
Zastosowano tutaj twierdzenie o wyznaczniku iloczynu macierzy.

- Przypomnijmy, że <u>grupa</u> G to zbiór $\{g_1, g_2, g_3, \ldots\}$ z działaniem grupowym $\circ$ takim, że
  1) $\forall g_i, g_j\ \exists g_k \quad g_i \circ g_j = g_k$ (domkniętość zbioru),
  2) $\forall g_i, g_j, g_k \quad (g_i \circ g_j)\circ g_k = g_i \circ (g_j \circ g_k)$ (łączność działania),
  3) $\exists e\ \forall g \quad e\circ g = g \circ e = g$ (istnienie elementu neutralnego),
  4) $\forall g_i\ \exists g_i^{-1}\ g_i \circ g_i^{-1} = e$ (istnienie elementów odwrotnych).

- Jeśli działanie grupowe jest przemienne tzn. $g_i \circ g_j = g_j \circ g_i$ mówimy, że grupa jest <u>przemienna</u> lub <u>abelowa</u>. Mnożenie macierzy jest nieprzemienne, więc interesująca nas grupa $SU(2)$ jest <u>nieprzemienna</u> lub <u>nieableowa</u>.

- Fakt, że pod działaniem sił silnych proton jest taką samą cząstką jak neutron, oznacza, że jeśli ψ_N jest rozwiązaniem równania Schrödingera, w którym hamiltonian reprezentuje tylko oddziaływanie silne, to rozwiązaniem jest automatycznie funkcja $\tilde{\psi}_N = U\psi_N$, gdzie $U \in SU(2)$. Co z tego wynika?

- Zakładamy, że ψ_N spełnia równanie
$$i\hbar\frac{\partial\psi_N}{\partial t} = H\psi_N .$$
Skoro $\tilde{\psi}_N = U\psi_N$ ma też spełniać to równanie, to podziałajmy na nie macierzą unitarną U. Ponieważ macierz U jest niezależna od czasu, mamy
$$i\hbar\frac{\partial U\psi_N}{\partial t} = UH\psi_N \quad \Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}_N}{\partial t} = UHU^{+}\tilde{\psi}_N .$$
Ponieważ ψ_N i $\tilde{\psi}_N$ mają spełniać to samo równanie Schrödingera, więc musi być spełniony warunek
$$UHU^{+} = H \quad \text{lub} \quad UH = HU,$$
czyli hamiltonian ma nie ulegać zmianie na skutek działania macierzy U tzn. ma być niezmiennikiem transformacji U należących do grupy $SU(2)$ lub H ma komutować z U.

Wykład VI cd.   Fizyka cząstek elementarnych

- Zgodnie z twierdzeniem Noether niezmienniczość działania (niezmienniczość hamiltonianu pociąga zwykle za sobą niezmienniczość działania) danej teorii przy transformacjach należących do określonej grupy, sprawia, że w teorii tej występuje zachowywana wielkość. W interesującym nas przypadku jest to izospin. A zatem, w oddziaływaniach silnych zachowywany jest izospin.

- W teorii kwantowej zachowanie danej wielkości jest równoważne komutowaniu operatora danej wielkości z hamiltonianem. A zatem zachowywanie izospinu oznacza, że

$$[H, I_i] \equiv H\, I_i - I_i\, H = 0, \quad i = 1,2,3.$$

- Równoważność warunku symetrii izospinowej $UHU^+ = H$ oraz warunku zachowania izospinu $[H, I_i] = 0$ łatwo zrozumieć bez odwoływania się do twierdzenia Noether. Wystarczy w tym celu zapisać transformację U jako

$$U = \exp[i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}] = \exp[i(\omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3)],$$

gdzie $\boldsymbol{\omega} \equiv (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ jest zbiorem trzech parametrów rzeczywistych określających daną macierz U. Łatwo sprawdzić, że macierz U jest unitarna, a jej wyznacznik wynosi 1. Musimy tylko pamiętać, że macierze $\mathbf{I} \equiv (I_1, I_2, I_3)$ są hermitowskie $\left(I_i^+ = I_i\right)$ i bezśladowe $(\mathrm{Tr}[I_i] = 0)$. Rzeczywiście,

$$U^+ = \exp[-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}] \qquad \Rightarrow \qquad U^+U = UU^+ = 1,$$

a także

$$\mathrm{Tr}U = \exp\left(\mathrm{Tr}[\ln U]\right) = \exp\left(i\omega_1 \mathrm{Tr}[I_1] + i\omega_2 \mathrm{Tr}[I_2] + i\omega_3 \mathrm{Tr}[I_3]\right) = e^0 = 1.$$

Teraz bez trudu już dowodzimy, że

$$UHU^+ = H \qquad \Leftrightarrow \qquad [H, I_i] = 0.$$

Należy jeszcze uwzględnić, że eksponens operatora definiujemy poprzez szereg

$$e^A \equiv 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

<u>Wykład VI cd.</u> Fizyka cząstek elementarnych

<u>Deuteron</u>

- Deuteron to stan związany protonu i neutronu. Ponieważ mają one izospin $I = \frac{1}{2}$, a trzecia składowa izospinu równa jest odpowiednio $I_3 = \frac{1}{2}$ i $I_3 = -\frac{1}{2}$, to, zgodnie z regułą sumowania spinów, trzecia składowa izospinu deuteronu znika, natomiast pełny izospin może być równy 0 lub 1.

- <u>Reguła sumowania spinów</u> S_1 i S_2 głosi, że spin sumaryczny *S* mieści się w zakresie $|S_1 - S_2| \leq S \leq S_1 + S_2$, a jego wartość zmienia się o $\hbar$. Tak na przykład całkowity spin dwóch cząstek o spinie $\hbar$ i $\frac{3\hbar}{2}$ wynosi $\frac{\hbar}{2}$, $\frac{3\hbar}{2}$ lub $\frac{5\hbar}{2}$.

- Gdyby izospin deuteronu był równy 1, to deuteron byłby członkiem trypletu tworzonego przez pary $(p, p), (p, n), (n, n)$. Jednak w przyrodzie nie występuje ani stan związany (p, p), ani stan (n, n). Nieobecność stanu związanego (p, p) można by przypisać odpychaniu coulombowskiemu protonów, lecz ten argument nie działa w przypadku pary (n, n). Oznacza to, że deuteron jest singletem o izospinie $I = 0$.

- Nieistnienie stanów związanych (p, p) i (n, n) łatwo zrozumieć na gruncie teoretycznym wiedząc, że spin deuteronu wynosi $\hbar$ przy znikającym orbitalnym momencie pędu (pomijam tu domieszkę fali *d*). A więc w deuteronie neutron i proton występują w tym samym stanie pędowym, a ich spiny są zgodne. Gdy w deuteronie proton zamienić na neutron, wówczas spiny obu neutronów musiałyby być zgodne, co nie jest możliwe ze względu na zakaz Pauliego.

<u>Antynukleony</u>

- Tak jak ten sam spin mają cząstki i antycząstki, przyjmujemy, że <u>izospin antynuleonów</u> wynosi jak nukleonów $I = \frac{1}{2}$, przy czym trzecia składowa izospinu równa jest $I_3 = -\frac{1}{2}$ dla antyprotonu i $I_3 = \frac{1}{2}$ dla antyneutronu. Oznacza to, w przypadku pary proton i antyproton, zgodnie z regułami sumowania spinu, izospin wynosi 0 lub 1. W pierwszym wypadku anihilacja $p\,\bar{p}$ może nastąpić przy zachowaniu izospinu w cząstki nie oddziałujące silnie np. $p\,\bar{p} \to e^+ e^-$. W drugim mamy anihilację, której produktami są cząstki oddziaływujące silnie np. $p\,\bar{p} \to \pi^+ \pi^-$. A jak przypisać izospin hadronom innym niż nukleony?

<u>Wykład VI cd.</u> Fizyka cząstek elementarnych

<u>Piony</u>

- Określenie izospinu hadronów bazuje na występowaniu pewnych grup cząstek różniących się jedynie ładunkiem elektrycznym. Taką grupę tworzą trzy mezony – tryplet – o zerowym spinie oznaczane jako π^+, π^0, π^-. Masy naładowanych pionów, będących swoimi antycząstkami, wynoszą 139,6 MeV, a masa neutralnego równa jest 135 MeV. Zakłada się, że widoczna różnica mas ma pochodzenie elektromagnetyczne.

- Przyjmuje się, że wartość izospinu pionów wynosi $I = 1$, przy czym trzecia składowa izospinu równa jest $I_3 = 1$ dla dodatniego pionu, $I_3 = 0$ dla neutralnego i $I_3 = -1$ dla ujemnego. Funkcje falowe pionów wybieramy jako

$$\varphi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Ponownie odwołując się do spinu, tym razem równego $\hbar$ nie zaś $\hbar/2$, wprowadzamy hermitowski operator izospinu $\mathbf{I}$, którego trzy składowe wynoszą:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Widzimy, że funkcje falowe φ_+, φ_0 i φ_- są wektorami własnymi operatora I_3 z wartościami własnymi 1, 0 i -1.

- Unitarne transformacje mieszające różne składowe izotopowe pionów konstruujemy podobnie jak te dla nukleonów. Podobnie się też rzecz ma z symetrią izotopową i zachowaniem izospinu. Należy jednak pamiętać, że zachodzą one nie oddzielnie dla pionów i dla nukleonów, lecz jednocześnie dla wszystkich hadronów.

- Łatwo zauważyć, że w reakcji $\pi^- + p \to \pi^0 + n$ zachowana jest trzecia znikająca składowa izospinu, lecz niewiele możemy powiedzieć o pełnym izospinie, bo para pion i nukleon mogą występować zarówno w stanie $I = \frac{1}{2}$ jak i $I = \frac{3}{2}$.

<u>Wykład VI cd.</u> Fizyka cząstek elementarnych

- Nietrywialną konsekwencję zachowania pełnego izospinu dostarczają reakcje:

$$1)\quad n+p\to\pi^{0}+d\,,$$
$$2)\quad p+p\to\pi^{+}+d\,.$$

W obu procesach zachowana jest oczywiście trzecia składowa izospinu równa $I_3=0$ w pierwszym przypadku oraz $I_3=1$ w drugim. Zauważmy teraz, że izospin stanu końcowego obu reakcji wynosi $I=1$. Para (n,p) może mieć izospin $I=1$ lub $I=0$ z prawdopodobieństwami równymi 1/2 . Natomiast para (p,p) zawsze występuje w stanie $I=1$. Skoro izospin jest zachowany, prawdopodobieństwo zajścia drugiej reakcji jest dwa razy większe niż pierwszej. Eksperyment potwierdza, że przekrój czynny na reakcję 2) jest rzeczywiście z dobrym przybliżeniem dwa razy większy niż przekrój czynny na reakcję 1).

<u>Rezonanse delta</u>

- Ostatnią omawianą grupą cząstek są niezwykle ciekawe rezonanse Δ - bariony o spinie $\frac{3\hbar}{2}$ i czasie życia wynoszącym zaledwie 10^{-23} s (w takim czasie światło pokonuje drogę 1 fm). Określanie rezonanse bierze się stąd, że przekrój czynny na oddziaływanie elastyczne $\pi+N\to\pi+N$ gwałtownie wzrasta, gdy całkowita energia w układzie środka masy pary $\pi+N$ równa jest masie Δ wynoszącej ok. 1235 MeV. Zachodzi wtedy rezonansowy proces

$$\pi+N\to\Delta\to\pi+N\ .$$

- Rezonanse Δ występują w czterech stanach ładunkowych jako $\Delta^{++}, \Delta^{+}, \Delta^{0}, \Delta^{-}$. Ze względu na swoje podobieństwo delty tworzą multiplet zwany kwadrupletem. Jeśli cząstka występuje w czterech stanach izotopowych to jej izospin wynosi $I=\frac{3}{2}$, a trzecia składowa izospinu równa $I_3=-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ numeruje członków kwadrupletu.

- Odwołując się ponownie do spinu, tym razem równego $\frac{3\hbar}{2}$, można wprowadzić hermitowski operator izospinu $\mathbf{I}$ i sformalizować kwestie izotopowej symetrii i zachowania izospinu.

- Wykład kończymy konkluzją – <u>wszystkim hadronom można przypisać izospin, który jest zachowywany w oddziaływaniach silnych</u>.