Grupa SU(N) i jej reprezentacje

- Jak już wyjaśniliśmy, symetria izospinowa oddziaływań silnych polega na niezmienniczości hamiltonianu, a właściwie działania, opisującego siły silne przy transformacjach należących do grupy SU(2). Grupę tę tworzą unitarne macierze wymiaru 2×2 o wyznaczniku równym jeden. Funkcja falowa nukleonu mającego izospin 1/2 jest dwuskładnikowym wektorem, więc macierzą o wymiarze 2×2 możemy dokonać obrotu tego wektora w przestrzeni izospinu, aby, powiedzmy, proton zamienić w neutron.

- Jak też już wiemy, piony mają izospin 1, a ich funkcja falowa jest wektorem trójskładnikowym. Funkcja falowa rezonansów delta jest czteroskładnikowa, bowiem ich izospin wynosi 3/2. Obroty w przestrzeni izospinu dokonujemy wówczas macierzami o wymiarach, odpowiednio, 3×3 oraz 4×4. Należy jednak pamiętać, że symetria izospinowa zachodzi nie dla poszczególnych grup hadronów o określonej wartości izospinu, lecz łącznie dla wszystkich hadronów i że grupą symetrii nadal grupa SU(2). Tak dochodzimy do pojęcia reprezentacji grupy i konieczności wprowadzenia reprezentacji grupy SU(2) o różnych wymiarach.

- Ponieważ w dalszej części wykładu wykorzystywać będziemy nie tylko symetrię SU(2), lecz i SU(3), omówimy teraz grupę SU(N), gdzie N jest liczbą naturalną.

Grupa SU(N)

- Grupę SU(N) (a dokładniej jej fundamentalną reprezentację) tworzą macierze unitarne o wymiarze $N\times N$, których wyznacznik równy jest jedności.

- Ile liczb rzeczywistych jednoznacznie określa macierz $U\in \mathrm{SU}(N)$? Macierz zespoloną o wymiarze $N\times N$ definiuje $2N^2$ liczb. Wymóg unitarności $UU^+ = 1$ daje tyle równań, ile jest elementów macierzy, czyli N^2. Jeśli dołożymy warunek $\det U = 1$, to dochodzimy do wniosku, że liczba liczb rzeczywistych określających jednoznacznie macierz należącą do SU(N) wynosi $2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1$. Dla SU(2) są to 3 liczby, a dla SU(3) mamy 8 liczb.

<u>Wykład VIII cd.</u>   Fizyka cząstek elementarnych

- Macierz $U \in \mathrm{SU}(N)$ można zapisać jako

$$U = \exp[i\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}] = \exp[i(\omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \ldots + \omega_{N^2-1} I_{N^2-1})]\,,$$

  gdzie $\boldsymbol{\omega} \equiv (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{N^2-1})$ są parametrami rzeczywistymi określającymi macierz, a $\mathbf{I} \equiv (I_1, I_2, \ldots, I_{N^2-1})$ zbiorem hermitiowskich, bezśladowych $(\mathrm{Tr}\, I_i = 0)$ macierzy zwanych <u>generatorami grupy</u> SU(N).

- Łatwo zauważyć, że macierz postaci $U = \exp[i\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}]$ jest unitarna, a jej wyznacznik wynosi 1. Musimy tylko pamiętać, że macierze $\mathbf{I} \equiv (I_1, I_2, \ldots, I_{N^2-1})$ są hermitowskie $\left(I_i^+ = I_i\right)$ i bezśladowe $\left(\mathrm{Tr}[I_i] = 0\right)$. Rzeczywiście,

$$U^+ = \exp[-i\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}] \qquad \Rightarrow \qquad U^+U = UU^+ = 1\,,$$

  a także

$$\mathrm{Tr}\, U = \exp\left(\mathrm{Tr}[\ln U]\right) = \exp\left(i \sum_{i=1}^{N^2-1} \omega_i\, \mathrm{Tr}[I_i] \right) = e^0 = 1\,.$$

- Grupę SU(N) możemy zdefiniować przez zadanie relacji komutacyjnych spełnianych przez generatory grupy, a mianowicie

$$[I_i, I_j] = i f^{ijk} I_k, \qquad i,j,k = 1, 2, \ldots N^2 - 1,$$

  gdzie wielkości f^{ijk} nazywane są <u>stałymi struktury grupy</u>, które faktycznie definiują grupę. Wybór generatorów danej grupy nie jest jednoznaczny, możemy je wybrać na wiele sposobów, choć dla zmniejszenia swobody przyjmuje się jeszcze zwykle warunek normalizacji $\mathrm{Tr}[I_i^2] = \frac{1}{2}$.

- W przypadku grupy SU(2), f^{ijk} to znany nam <u>tensor całkowicie antysymetryczny</u> ε^{ijk}, który zmienia znak, gdy zmienimy miejscami dowolną parę indeksów np. $\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{jik}$, oraz $\varepsilon^{123} = 1$. Relacja komutacyjna przybiera dla grupy SU(2) znaną z teorii spinu postać

$$[I_i, I_j] = i\varepsilon^{ijk} I_k, \qquad i,j,k = 1, 2, 3\,.$$

  Generatory zaś można wybrać w postaci $\mathbf{I} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$, gdzie wektor $\boldsymbol{\sigma}$ tworzą trzy hermitowskie bezśladowe macierze Pauliego $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Wykład VIII cd.</u> Fizyka cząstek elementarnych

- Jak już wspomnieliśmy, generatory danej grupy możemy wybrać na wiele sposobów. W szczególności generatory grupy SU(2) wcale nie muszą być macierzami 2×2, lecz mogą mieć większy wymiar. Ważne, aby spełniały definiujące grupę relacje komutacyjne.

<u>Reprezentacja grupy</u>

- Grupa jest abstrakcyjnym zbiorem obiektów o określonych własnościach, reprezentacja tej grupy jest konkretną realizacją. Sformalizujmy to pojęcie.

- <u>Reprezentacją macierzową grupy</u> *G* nazywamy przekształcenie zachowujące strukturę grupową, czyli *homomorfizm*, grupy w zbiór macierzy kwadratowych *D* takie, że
$$\forall g_i, g_j \in G \quad D(g_i \circ g_j) = D(g_i)\cdot D(g_j)\,,$$
gdzie $\circ$ oznacza działanie grupowe, a kropka mnożenie macierzy. A więc zbiór macierzy *D* tworzy grupę.

- W dalszej części wykładu będą nas interesować jedynie <u>reprezentacje wierne i równoważne grupy</u> *G*, kiedy przekształcenie elementów grupy w zbiór macierzy jest *izomorfizmem*, czyli jest wzajemnie jednoznaczne. Wówczas reprezentacja ma następujące własności
$$D(e) = 1, \qquad \forall g \in G \quad D(g\circ g^{-1}) = D(g)\cdot D^{-1}(g) = 1\,,$$
to znaczy element neutralny grupy przechodzi w macierz jednostkową i odwrotnie, a element grupy odwrotny do *g* jest reprezentowany przez macierz odwrotną do *D*(*g*) i odwrotnie.

- Macierze *D* danej reprezentacji grupy *G* daje się nieraz przekształcić za pomocą jednej macierzy *S* w macierze $\tilde{D}$, tzn. $D \to \tilde{D} = SDS^{-1}$, takie, że mają one postać *klatkową*
$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{D}_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{D}_k \end{pmatrix},$$
gdzie na przekątnej mamy niezerowe macierze o wymiarze mniejszym niż wymiar $\tilde{D}$, a poza przekątną same zera. Suma wymiarów macierzy $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \dots \tilde{D}_k$ jest, oczywiście, równa wymiarowi $\tilde{D}$. Mówimy wówczas, że reprezentacja *D*, a zatem i $\tilde{D}$, są <u>redukowalne</u> lub <u>przywiedlne</u>, bowiem każdy ze zbiorów $\tilde{D}_i \quad i = 1, 2, \dots k$ sam tworzy reprezentację grupy *G*.

Wykład VIII cd. Fizyka cząstek elementarnych

- Jeśli wszystkich macierzy reprezentacji *D* nie można za pomocą jednej macierzy *S* sprowadzić do postaci klatkowej, mówimy, że reprezentacja *D* jest <u>nieredukowalna</u> lub <u>nieprzywiedlna</u>.

- Reprezentacja grupy SU(*N*) o wymiarze $N \times N$ nazywania jest <u>fundamentalną</u>, bowiem macierze o tym wymiarze właśnie definiują grupę. Jest to reprezentacja o najmniejszym wymiarze.

- Znajdowanie reprezentacji o wyższych wymiarach polega na znalezieniu zbioru generatorów spełniających relacje komutacyjne zadane przez stałe struktury.

- Ważną nieredukowalną reprezentacją grupy SU(*N*) o wymiarze $(N^2-1)\times(N^2-1)$ jest <u>reprezentacja dołączona</u>, której generatorami są stałe struktury wg. przepisu $I_i^{mn} = -if^{imn}$.

- Łatwo znaleźć reprezentację dołączoną grupy SU(2), w której stałe struktury tworzą tensor całkowicie antysymetryczny. Trzy generatory określone formułą $I_i^{mn} = -i\varepsilon^{imn}$ znajdujemy jako

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Łatwo sprawdzić, że generatory I_1, I_2, I_3 spełniają relacje komutacyjne definiujące grupę SU(2). Znaleziona reprezentacja dołączona różni się od reprezentacji o wymiarze 3×3, którą stosuje się zwykle dla cząstek o jednostkowym spinie.

- W fizyce często mamy do czynienia z sytuacją opisywaną matematycznie jako <u>iloczyn zewnętrzny</u> reprezentacji. Rozważmy dla przykładu układ dwóch nukleonów. Stan izotopowy jednego nukleonu opisuje wektor dwuskładnikowy. Ponieważ para nukleonów może występować czterech stanach izotopowych $(p,p), (p,n), (n,p), (n,n)$, jej opis realizujemy za pomocą wektora czteroskładnikowego. Rotację nukleonu w przestrzeni izospinu wykujemy za pomocą macierzy 2×2, natomiast do rotacji pary nukleonów potrzebujemy macierzy 4×4. Mówimy, że nukleon należy do dwuwymiarowej reprezentacji izotopowej symetrii SU(2), natomiast para nukleonów do czterowymiarowej, będącej iloczynem zewnętrznym dwóch reprezentacji dwuwymiarowych, co zapisujemy jako $\mathbf{2}\otimes\mathbf{2}=\mathbf{4}$.

<u>Wykład VIII cd.</u> Fizyka cząstek elementarnych

- Czterowymiarowa reprezentacja grupy SU(2) jest <u>redukowalna</u>, a więc każdą macierz $U \in \mathrm{SU}(2)$ można sprowadzić do postaci

$$U_{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_{(3)}^{11} & u_{(3)}^{12} & u_{(3)}^{13} \\ 0 & u_{(3)}^{21} & u_{(3)}^{22} & u_{(3)}^{23} \\ 0 & u_{(3)}^{31} & u_{(3)}^{32} & u_{(3)}^{33} \end{pmatrix},$$

  gdzie $u_{(3)}^{ij}$ są elementami macierzy $U_{(3)}$ tworzących trójwymiarową reprezentację grupy SU(2). Zaistniałą sytuację zapisujemy jako

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$$

  i mówimy, że czterowymiarowa reprezentacja rozpada się na reprezentację jednowymiarową i trójwymiarową.

- Fizyczny sens redukowania się reprezentacji czterowymiarowej, będącej iloczynem reprezentacji dwuwymiarowych, na reprezentację jednowymiarową i trójwymiarową jest taki, że para nukleonów występuje w stanie o izospinie 0 lub 1. Jeśli $I = 0$, to $I_3 = 0$ i mamy jeden stan, czyli <u>singlet</u>. Natomiast gdy $I = 1$, to $I_3 = -1, 0, 1$, możliwe są trzy stany tworzące <u>tryplet</u>. Do singletu odnosi się reprezentacja jednowymiarowa, a do trypletu trójwymiarowa.

- Na koniec podamy dwa twierdzenia dotyczące reprezentacji grupy SU(3):

$$\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8},$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10},$$

  gdzie $\mathbf{3}$ odpowiada reprezentacji fundamentalnej o wymiarze macierzy 3×3, a $\overline{\mathbf{3}}$ odnosi się do reprezentacji sprzężonej do fundamentalnej. Powyższe twierdzenia leżą u podstaw modelu kwarkowego hadronów.