<u>Wykład I</u> Mechanika kwantowa

Mechanika kwantowa nie dziwi tylko tych, którzy jej nie rozumieją

Niels Bohr[1]

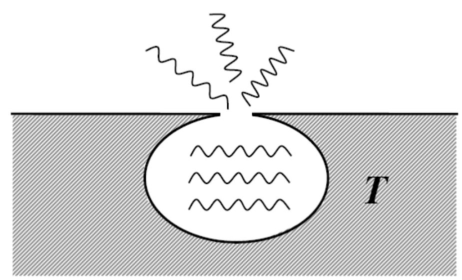
<u>Zalecany podręcznik:</u> L. Schiff, *Mechanika kwantowa,*
Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1977

Kwantowe odkrycia i *Stara teoria kwantów*

<u>Stała Plancka</u>[2] (1900) - uniwersalna stała fizyczna o wymiarze działania

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}\,, \quad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$$

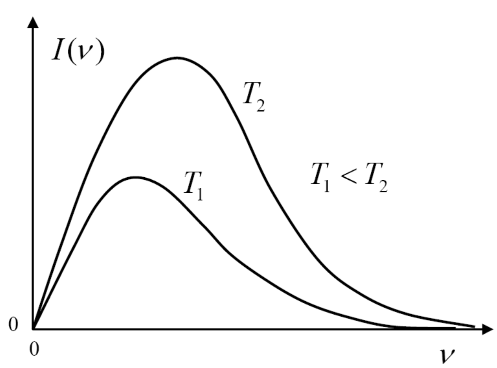
Wprowadzona dla opisania uniwersalnego charakteru widma promieniowania *ciała doskonale czarnego*, które zależy tylko od temperatury T ciała, nie zależy zaś od własności materiału, kształtu ciała itp.



Model ciala doskonale czarnego

<u>Widmo promieniowania</u>

$I(\nu)d\nu$ ilość energii wyemitowana w zakresie częstotliwości $(\nu, \nu + d\nu)$ z jednostki powierzchni, w jednostce czasu, w jednostkowy kąt bryłowy,



$$I(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp\dfrac{h\nu}{k_B T} - 1}\,,$$

c – prędkość świtała,

k_B – stała Boltzmanna

Argument wymiarowy pokazuje, że uniwersalny charakter widma promieniowania ciała doskonale czarnego wymaga istnienia stałej Plancka!

[1] Niels Bohr 1885-1962
[2] Max Planck 1858-1947

<u>Wykład I cd.</u> Mechanika kwantowa

Dualizm korpuskularno-falowy

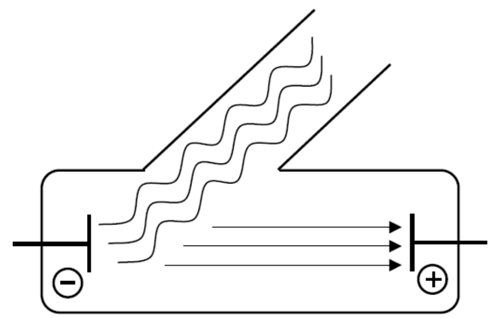
- Albert Einstein[3] (1905): fala elektromagnetyczna o częstotliwości ν (częstości ω) jest zbiorem cząstek – fotonów – o energii $E = h\nu$ ($E = \hbar\omega$), pędzie $p = h\nu / c$ ($p = \hbar\omega / c$) i zerowej masie.

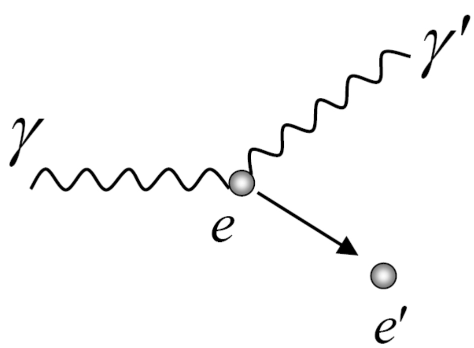
- Louis de Broglie[4] (1924): z cząstka o pędzie p stowarzyszona jest fala materii o długości $\lambda = \frac{h}{p}$.

Długość fali fotonu $\lambda = c\frac{1}{\nu} = \frac{h}{p}$ zgadza się z hipotezą Broglie.

Efekt fotoelektryczny

Prąd elektryczny pojawia się powyżej pewnej minimalnej częstotliwości światła ν_{min} niezależnie od jego intensywności. Energia fotonu $h\nu_{min}$ równa jest pracy potrzebnej do wyrwania elektronu z katody.





Efekt Comptona[5] (1922)

Długość fali promieniowania Roentgena zwiększa się przy przechodzeniu przez materię. Dzieje się tak na skutek rozpraszanie fotonów na elektronach. Jeśli przyjąć, że elektron początkowo spoczywa to $E_\gamma > E_{\gamma'}$, a co z tym idzie $\lambda < \lambda'$.

---

[3] Albert Einstein 1879 – 1955
[4] Louis de Broglie 1892 – 1987
[5] Artur Holly Compton 1892 – 1962

<u>Wykład I cd.</u> Mechanika kwantowa

<u>Model Bohra atom wodoru</u> (1913)

Na orbicie stacjonarnej (elektron nie promieniuje) moment pędu elektronu jest (całkowitą) wielokrotnością $\hbar$, a siła elektrostatycznego przyciągania jest równoważona przez siłę odśrodkową bezwładności. Zakładamy dalej, że orbita jest okręgiem o promieniu r i oraz że środek masy pokrywa się z położeniem protonu (gdyż masa elektronu m jest dużo mniejsza od masy protonu). Wtedy mamy:

moment pędu: $L = mr\mathrm{v} = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3\ldots \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v} = \dfrac{n\hbar}{mr}$

warunek równowagi sił:

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad m\mathrm{v}^2 = \frac{e^2}{r} \quad \Rightarrow \quad m\left(\frac{n\hbar}{mr}\right)^2 = \frac{e^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{n^2\hbar^2}{mr} = e^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{n^2\hbar^2}{me^2}$$

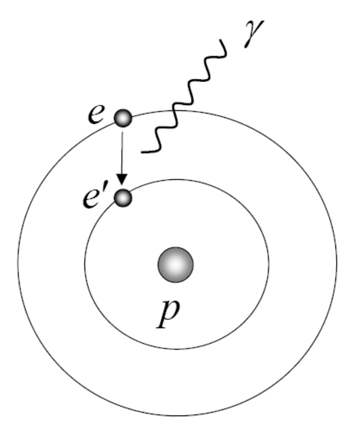
Argument wymiarowy pokazuje, że określone rozmiary atomów wymagają istnienia stałej Plancka!

Energia kinetyczna: $T = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{2} = \dfrac{e^2}{2r} = \dfrac{me^4}{2n^2\hbar^2}$

Energia potencjalna: $V = -\dfrac{e^2}{r} = -\dfrac{me^4}{n^2\hbar^2}$

Energia całkowita: $E_n = T + V = -\dfrac{me^4}{2n^2\hbar^2} = -\dfrac{R}{n^2}$, energia jest skwantowana!

$R \equiv \dfrac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6\ \mathrm{MeV}$ – stała Rydberga[6]



Jeśli elektron znajduje się na orbicie n' i przechodzi na niższą orbitę n $(n' > n)$, to wyemitowany foton ma energię:

$$E_\nu = E_{n'} - E_n = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$$

Częstotliwość (częstość) promieniowania:

$$\nu_{nn'} = \frac{R}{h}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right) \qquad \left(\omega_{nn'} = \frac{R}{\hbar}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)\right)$$

$n = 1$ - seria Lymana[7], $n = 2$ - seria Balmera[8], $n = 3$ - seria Paschena[9]

---

[6] Johannes Rydberg 1854-1919
[7] Theodore Lyman 1874-1954
[8] Johann Jakob Balmer 1825-1898
[9] Louis Karl Heinrich Friedrich Paschen 1865-1947

Wykład I cd. Mechanika kwantowa

Dygresja

Wprowadzanie sił bezwładności często budzi kontrowersje, warto więc pokazać, że równanie równowagi $m\mathrm{v}^2/r = e^2/r^2$ można łatwo wyprowadzić nie odwołując się do pojęcia sił bezwładności. Rozpatrując ruch pod działaniem siły Coulomba po okręgu o ustalonym promieniu r znajdującym się w płaszczyźnie *x-y*, mamy dwa newtonowskie równania ruchu

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{e^2}{r^3}x \\ m\ddot{y} = -\dfrac{e^2}{r^3}y \end{cases}$$

znak minus wynika z faktu, że siła jest przyciągająca

Wprowadzając współrzędne biegunowe (r,φ), współrzędne kartezjańskie równe są $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$, a równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{cases} -mr(\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\ddot{\varphi}) = -\dfrac{e^2}{r^2}\cos\varphi \\ -m(\sin\varphi\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\ddot{\varphi}) = -\dfrac{e^2}{r^2}\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi\dot{\varphi}^2 + \sin\varphi\ddot{\varphi} = \dfrac{e^2}{mr^3}\cos\varphi \\ \sin\varphi\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\ddot{\varphi} = \dfrac{e^2}{mr^3}\sin\varphi \end{cases}$$

Mnożąc pierwsze równanie przez $\sin\varphi$, a drugie przez $\cos\varphi$ i odejmując stronami od pierwszego równania drugie, dostajemy $\ddot{\varphi} = 0$, co oznacza, że ruch po okręgu odbywa się ze stała prędkością kątową $\dot{\varphi}$.

Mnożąc pierwsze równanie przez $\cos\varphi$, a drugie przez $\sin\varphi$ i dodając równania stronami, dostajemy

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{e^2}{mr^3} \quad\Rightarrow\quad mr\dot{\varphi}^2 = \frac{e^2}{r^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{m\mathrm{v}^2}{r} = \frac{e^2}{r^2},$$

gdzie zostało uwzględnione, że $\mathrm{v} = r\dot{\varphi}$.

Zasada nieoznaczoności Heisenberga[10] (1926)

W świecie kwantowym są pary wielkości zwane sprzężonymi, takie jak np. składowa x położenia cząstki i pęd p_x tej cząstki, które nie mogą być znane jednocześnie z dowolnie wysoką dokładnością, lecz spełniają warunek

$$\boxed{\Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}}$$

gdzie $\Delta x \equiv \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$, $\Delta p_x \equiv \sqrt{\langle p_x^2\rangle - \langle p_x\rangle^2}$ są odchyleniami standardowymi od wartości średnich $\langle x\rangle$ i $\langle p_x\rangle$. Im lepiej mierzymy x, tym gorzej znamy p_x i odwrotnie, im dokładniejszy jest pomiar p_x tym gorsza jest znajomość x.

[10] Werner Heisenberg 1901-1976