Wykład III Mechanika

Proste równania ruchu punktu materialnego

Ruch swobody

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} = 0 \\ \vec{p}(t=0) = \vec{p}_0 \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{p}(t) = \vec{p}_0 \qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = 0 \\ \left.\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \\ \vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 \end{cases}$$

Energia całkowita: $E = \dfrac{\vec{p}_0^2}{2m} = const$

Ruch pod działaniem stałej siły

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F} \\ \vec{p}(t=0) = \vec{p}_0 \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{p}(t) = \vec{p}_0 + \vec{F}t \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \vec{a} \\ \left.\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \\ \vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases}$$

Energia potencjalna: $V(\vec{r}) = V_0 - \vec{F}\,\vec{r} = V_0 - F_x x - F_y y - F_z z$

Energia całkowita:

$$E = \frac{\vec{p}^2(t)}{2m} + V(\vec{r}) = \frac{m(\vec{v}_0 + \vec{a}t)^2}{2} + V_0 - m\vec{a}\left(\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2\right) = \frac{m\vec{v}_0^2}{2} + V_0 - m\vec{a}\vec{r}_0 = const$$

Ruch harmoniczny

siła działa wzdłuż kierunku *x*, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -k\,x\,\vec{e}_x \\ \left.\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \\ \vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 \end{cases}$$

w kierunkach *y* i *z* mamy ruch swobodny, wzdłuż *x*

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -k\,x \\ v_x(t=0) = v_0 \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x \\ x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t=0) = B \\ v_x(t=0) = \omega A \end{cases} \qquad \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + x_0\cos(\omega t)}$$

Energia potencjalna: $V(x) = V_0 + \dfrac{1}{2}kx^2 = V_0 + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$

Energia całkowita: $E = \dfrac{p^2(t)}{2m} + V(x) = \dfrac{mv_0^2}{2} + \dfrac{kx_0^2}{2} = const$

Wykład III cd. Mechanika

Hamowanie

tracie – siła niepotencjalna

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\lambda\dfrac{dx(t)}{dt} \\ v(t=0) = v_0 \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = -\gamma v(t) \quad (\gamma \equiv \lambda / m) \\ v(t=0) = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v(t) = v_0 e^{-\gamma t} \\ x(t) = x_0 + \int_0^t dt' v(t') = x_0 + \dfrac{v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \end{cases}$$

Prędkość spada do zera po nieskończonym czasie, ale zasięg jest skończony $x(t=\infty) = x_0 + \dfrac{v_0}{\gamma}$.

Spadanie z tarciem

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = mg - \lambda\dfrac{dx(t)}{dt} \\ v(t=0) = v_0 \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = g - \gamma v(t) \\ v(t=0) = v_0 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{\gamma}\frac{dv}{v - g/\gamma} = dt$$

$$-\frac{1}{\gamma}\ln(v - g/\gamma) = t + C$$

$$v(t) = \frac{g}{\gamma} + Ae^{-\gamma t}$$

$$\frac{g}{\gamma} + A = v_0$$

$$\begin{cases} v(t) = \dfrac{g}{\gamma} + \left(v_0 - \dfrac{g}{\gamma}\right)e^{-\gamma t} \\ x(t) = x_0 + \dfrac{g}{\gamma}t + \dfrac{v_0 - g/\gamma}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \end{cases}$$

Jeśli $v_0 < g/\gamma$, spadający obiekt przyspiesza, gdy zaś czy też $v_0 > g/\gamma$ hamuje.

Po czasie $t >> 1/\gamma$ mamy ruch jednostajny: $\begin{cases} v(t) \approx \dfrac{g}{\gamma} \\ x(t) \approx x_0 + \dfrac{v_0 - g/\gamma}{\gamma} + \dfrac{g}{\gamma}t \end{cases}$

Ruch pod działaniem siły Lorentza[1]

Cząstka naładowana porusza się w porusza się w stałym jednorodnym polu magnetycznym. Pole jest skierowane wzdłuż osi z czyli $\vec{B} = (0, 0, B)$, a siła Lorentza ma postać $\vec{F} = q\vec{v}(t) \times \vec{B}$. Należy rozwiązać równanie ruch z dwoma warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = q\vec{v}(t) \times \vec{B} \\ \left.\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \\ \vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

[1] Hendrik Antoon Lorentz 1853-1928

Wykład III cd. Mechanika

Pamiętając, że pole jest w kierunku osi z, składowe równania ruchu wyglądają następująco

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = q\,v_y(t)\,B \\ m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = -q\,v_x(t)\,B \\ m\dfrac{d^2z(t)}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

Trzecie równanie mówi, że ruch wzdłuż osi z jest swobodny więc $z(t) = z_0 + v_0^z t$.

Wprowadzając wielkość $\omega = \dfrac{qB}{m}$, dwa pozostałe równania zapisujemy jako

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \omega\dfrac{dy(t)}{dt} \\ \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = -\omega\dfrac{dx(t)}{dt} \end{cases}$$

Pamiętając, że prędkość to pochodna położenia po czasie, równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = \omega v_y(t) \\ \dfrac{dv_y(t)}{dt} = -\omega v_x(t) \end{cases}$$

Jeśli zróżniczkujemy pierwsze równanie to prawą stronę tego równania możemy zstąpić prawą stroną drugiego równania. Podobnie różniczkując po czasie drugie równanie, jego prawą stronę możemy zastąpić prawą strona pierwszego równania. Tak dostajemy

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v_x(t)}{dt^2} = -\omega^2 v_x(t) \\ \dfrac{d^2v_y(t)}{dt^2} = -\omega^2 v_y(t) \end{cases}$$

Równania na składowe prędkości są dokładnie takie jak wcześniej omówione równanie na składową x położenia w ruchu harmonicznym. Rozwiązania mają więc postać

$$\begin{cases} v_x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = C\sin(\omega t + \varphi) \\ v_y(t) = A\cos(\omega t) - B\sin(\omega t) = C\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Wykorzystując warunki początkowe znajdujemy

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0^y\sin(\omega t) + v_0^x\cos(\omega t) = v_0^T\sin(\omega t + \varphi) \\ v_y(t) = v_0^y\cos(\omega t) - v_0^x\sin(\omega t) = v_0^T\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad v_0^T \equiv \sqrt{(v_0^x)^2 + (v_0^y)^2}$$

Wykład III cd. Mechanika

Pamiętając, że prędkość to pochodna położenia po czasie, znajdujemy

$$\begin{cases} x(t) = C - \dfrac{v_0^y}{\omega}\cos(\omega t) + \dfrac{v_0^x}{\omega}\sin(\omega t) \\ y(t) = D + \dfrac{v_0^y}{\omega}\sin(\omega t) + \dfrac{v_0^x}{\omega}\cos(\omega t) \end{cases}$$

a uwzględniwszy warunek początkowy ostatecznie dostajemy

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \dfrac{v_0^y}{\omega} - \dfrac{v_0^y}{\omega}\cos(\omega t) + \dfrac{v_0^x}{\omega}\sin(\omega t) \\ y(t) = y_0 - \dfrac{v_0^x}{\omega} + \dfrac{v_0^y}{\omega}\sin(\omega t) + \dfrac{v_0^x}{\omega}\cos(\omega t) \end{cases}$$

Równanie toru

Wprowadziwszy wielkości $\tilde{x} \equiv x_0 + \dfrac{v_0^y}{\omega}, \quad \tilde{y} \equiv y_0 - \dfrac{v_0^x}{\omega}, \quad R \equiv \dfrac{v_0^T}{\omega}$,

można zauważyć, że spełnione jest równanie toru

$$(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2 = R^2,$$

które mówi, że w płaszczyźnie *x-y* ruch odbywa się po kole o promieniu *R* i środku w punkcie o współrzędnych $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Jeśli uwzględnić jeszcze ruch wzdłuż osi **z**, to stwierdzamy, że cząstka naładowana porusza się w polu magnetycznym po spirali, a właściwie helisie.

Energia cząstki

Energia kinetyczna cząstki dana jest wzorem $T = \dfrac{m\vec{v}^2(t)}{2}$. Podstawiwszy znalezione rozwiązanie na składowe prędkości stwierdzamy, że $T = \dfrac{m\vec{v}_0^2}{2} = const$, więc energia cząstki nie ulega zmianie. Do tego wniosku można dojeść na gruncie ogólnego rozumowania. Obliczamy pochodną czasową energii kinetycznej cząstki poruszającej się pod działaniem siły Lorentza

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}^2(t)}{2}\right) = \vec{v}(t)\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{v}(t)\vec{F}(t) = q\vec{v}(t)\left(\vec{v}(t) \times \vec{B}\right) = 0$$

Stwierdzamy, że energia kinetyczna jest stała, pochodna znika, gdyż siła jest prostopadła do prędkości ($\vec{F} \perp \vec{v}$). A zatem mówimy, że pole magnetyczne nie wykonuje pracy

$$W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int \vec{F}\vec{v} dt = 0$$