<u>Wykład IV</u> Mechanika

<u>Twierdzenie o wiriale</u>

<u>Jedna cząstka</u>

Wiriał: $w(t) \equiv m\vec{r}(t)\vec{v}(t)$

$$\frac{dw(t)}{dt} = m\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\vec{v}(t) + m\vec{r}(t)\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\vec{v}^2(t) + \vec{r}(t)\vec{F}(t)$$

Zakładamy $\vec{F}(\vec{r}) = \alpha r^n \hat{r}, \quad r \equiv |\vec{r}|, \quad \hat{r} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$, α- stała, n – liczba całkowita

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad V(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{n+1} r^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}\vec{F} = -(n+1)V$$

$$\frac{dw(t)}{dt} \equiv 2T(t) - (n+1)V(t) \;, \qquad T \equiv \frac{m\vec{v}^2}{2}$$

Uśrednianie po czasie: $\langle f(t) \rangle \equiv \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dt\, f(t)$

Jeśli $f(t)$ ograniczone: $\left\langle \frac{df(t)}{dt} \right\rangle = \lim_{\tau\to\infty} \frac{f(\tau) - f(0)}{\tau} = 0$

Jeśli wirial jest ograniczony, to $\left\langle \frac{dw(t)}{dt} \right\rangle = 0$, co daje

$$\boxed{2\langle T(t) \rangle - (n+1)\langle V(t) \rangle = 0}$$

$n = -2$ siły ciążenia i Coulomba $\quad 2\langle T(t) \rangle = -\langle V(t) \rangle$

$n = 1$ siły harmoniczne $\quad \langle T(t) \rangle = \langle V(t) \rangle$

<u>Przykład</u>

Prędkość Ziemi na orbicie $\langle mv^2(t) \rangle = \left\langle \frac{GMm}{R(t)} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad v \approx \sqrt{\frac{GM}{R}}$

Ten sam wynik dostajemy z warunku równowagi sił: $\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{R^2}$

Wykład IV cd. Mechanika

Wiele cząstek

Wiriał: $w(t) \equiv \sum_i m_i \vec{r}_i(t)\vec{v}_i(t)$, $\qquad T \equiv \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2}$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \sum_i \left(m_i \vec{v}_i^2(t) + \vec{r}_i(t)\vec{F}_i(t) \right) = 2T(t) + \sum_{i,j,i\neq j} \vec{r}_i(t)\vec{F}_{ij}(t) = 2T(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j,i\neq j} \left(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t) \right)\vec{F}_{ij}(t)$$

Założyliśmy nieobecność sił zewnętrznych $\left(\vec{F}_i = \sum_{j,i\neq j} \vec{F}_{ij} \right)$ i skorzystaliśmy z III zasady dynamiki.

Zakładamy $\vec{F}_{ij}(\vec{r}_{ij}) = \alpha r_{ij}^n \hat{r}_{ij}$, $\quad \vec{r}_{ij} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_j$, $\quad r_{ij} \equiv \left| \vec{r}_{ij} \right|$, $\quad \hat{r}_{ij} \equiv \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$

$$\vec{F}_{ij}(\vec{r}) = -\nabla V_{ij}(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad V(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{n+1} r^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{ij}\vec{F}_{ij} = -(n+1)V_{ij}$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = 2T(t) - (n+1)V(t) \ , \qquad V \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j,i\neq j} V_{ij}$$

$$\boxed{\left\langle \frac{dw(t)}{dt} \right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\langle T(t) \rangle - (n+1)\langle V(t) \rangle = 0}$$

Przykład 1

W krysztale, gdzie siły są w przybliżeniu harmoniczne (n = 1), średnia energia kinetyczna jonów sieci krystalicznej jest równa ich średniej energii potencjalnej.

Przykład 2

Temperatura gwiazdy, która znajduje się w równowadze, wzrasta na skutek wypromieniowywania energii! Całkowita energia gwiazdy $E = T + V$. Gdy gwiazda jest w równowadze $E = \langle T \rangle + \langle V \rangle$. Ponieważ $2\langle T \rangle = -\langle V \rangle$, $E = -\langle T \rangle$. Gdy więc spada E, która jest ujemna, wzrasta $\langle T \rangle$, a zatem wzrasta gwiazdy temperatura, która jest miarą energii kinetycznej cząstek tworzących gwiazdę.