Wykład IX — Mechanika

Twierdzenie Noether[1]

Niezmienniczość translacyjna

Jeden stopień swobody

Niech działanie $S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot{q},t)$ będzie niezmiennicze przy małym przesunięciu

$$\begin{cases} q'(t) = q(t) + \delta q \\ \dot{q}'(t) = \dot{q}(t) \end{cases} \qquad \left(\frac{d\delta q}{dt} = 0 \right)$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q',\dot{q}',t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q+\delta q,\dot{q},t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot{q},t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial q}\delta q = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q$$

Założyliśmy, że spełnione jest równanie Lagrange'a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

$$\boxed{S' = S \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0, \qquad P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{const}(t)}$$

Pęd układu niezmienniczego translacyjnie jest zachowywany

N stopni swobody

$$q \equiv \{q_1, q_2, \ldots, q_N\}, \quad \delta q \equiv \{\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_N\}$$

$$q' \equiv \{q_1', q_2', \ldots, q_N'\}, \quad \dot{q} \equiv \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N\},$$

$$\begin{cases} q'(t) = q(t) + \delta q \\ \dot{q}'(t) = \dot{q}(t) \end{cases}$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q+\delta q,\dot{q},t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot{q},t) + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i$$

Założyliśmy, że spełnione są równania Lagrange'a $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

Jeśli $\delta q_1 = \delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_N$, wówczas mamy

$$\boxed{S' = S \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad P \equiv \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}(t)}$$

Jeśli zaś δq_i dla każdego *i* jest różne od pozostałych, wtedy

$$\boxed{S' = S \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}(t), \quad i = 1, 2, \ldots N}$$

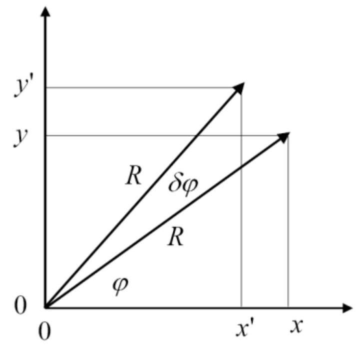
[1] Amalie Emmy Noether (1882 – 1935)

Wykład IX cd. Mechanika

Niezmienniczość przy obrotach

x, y - współrzędne kartezjańskie jednej cząstki

Niech działanie $S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$ będzie niezmiennicze przy obrocie o małyk kąt



$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi,$$
$$x' = R\cos(\varphi + \delta\varphi) \approx R\cos\varphi - R\sin\varphi\,\delta\varphi = x - y\delta\varphi$$
$$y' = R\sin(\varphi + \delta\varphi) \approx R\sin\varphi + R\cos\varphi\,\delta\varphi = y + x\delta\varphi$$

$$\begin{cases} x' = x - y\delta\varphi, & \dot{x}' = \dot{x} - \dot{y}\delta\varphi \\ y' = y + x\delta\varphi, & \dot{y}' = \dot{y} + \dot{x}\delta\varphi \end{cases}$$

$$\left(\frac{d\delta\varphi}{dt} = 0 \right)$$

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x', y', \dot{x}', \dot{y}', t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x - y\delta\varphi, y + x\delta\varphi, \dot{x} - \dot{y}\delta\varphi, \dot{y} + \dot{x}\delta\varphi, t)$$
$$= S + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-\frac{\partial L}{\partial x} y + \frac{\partial L}{\partial y} x - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \dot{x} \right] \delta\varphi$$
$$= S + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[-\frac{\partial L}{\partial x} y + \frac{\partial L}{\partial y} x - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} y + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) y + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} x - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \dot{x} \right] \delta\varphi$$

Korzystając równań Lagrange'a $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases}$ znajdujemy

$$S' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} x \right) \delta\varphi$$

$$\boxed{S' = S \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} x \right) = 0, \qquad J_z \equiv \left(x p_y - p_x y \right) = \text{const}(t)}$$

Momentu pędu układu niezmienniczego przy obrotach jest zachowywany

<u>Wykład IX cd.</u> Mechanika

<u>Niezmienniczość przy przesunięciach w czasie</u>

<u>Jeden stopień swobody</u>

Niech działanie $S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,\dot{q},t)$ będzie niezmiennicze przy transformacji

$$\begin{cases} t' = t + \delta t \\ q'(t') = q(t) \\ \dot{q}'(t') = \dot{q}(t) \end{cases}$$

$$S' = \int_{t_1+\delta t}^{t_2+\delta t} dt'\, L(q',\dot{q}',t') = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dt'}{dt} L(q(t),\dot{q}(t),t+\delta t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q(t),\dot{q}(t),t+\delta t) = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial t}\delta t$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} \qquad\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$S' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} \right]\delta t = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q} \right]\delta t$$

Korzystając ponownie z równania Lagrange'a, znajdujemy

$$S' = S - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L \right)\delta t$$

$$\boxed{S' = S \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L \right) = 0, \qquad E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = \text{const}(t)}$$

Energia układu niezmienniczego przy przesunięciach w czasie jest zachowywana

<u>*N* stopni swobody</u>

$$S' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial L}{\partial t}\delta t\,, \qquad\qquad \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right)$$

$$S' = S - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \right)\delta t$$

$$\boxed{S' = S \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \right) = 0, \qquad E \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \text{const}(t)}$$