Wykład VII Mechanika

Zagadnienie Keplera

Problem dwóch ciał

$L(\vec r_1, \vec r_2, \dot{\vec r}_1, \dot{\vec r}_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec r}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec r}_2^{\,2} - V(\vec r_1 - \vec r_2)$ (tylko oddziaływanie wzajemne ciał)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec r}_1 = -\nabla_1 V(\vec r_1 - \vec r_2) \\ m_2 \ddot{\vec r}_2 = -\nabla_2 V(\vec r_1 - \vec r_2) \end{cases}$$

$\vec R$ - położenie środka masy, $\vec r$ -położenie względne

$$\begin{cases} \vec R \equiv \dfrac{m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m_1 + m_2} \\ \vec r \equiv \vec r_1 - \vec r_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec r_1 = \vec R + \dfrac{m_2 \vec r}{m_1 + m_2} \\ \vec r_2 = \vec R - \dfrac{m_1 \vec r}{m_1 + m_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1} = \dfrac{\partial X}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial X} + \dfrac{\partial x}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{m_1}{M}\dfrac{\partial}{\partial X} + \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} = \dfrac{\partial X}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial X} + \dfrac{\partial x}{\partial x_2}\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{m_2}{M}\dfrac{\partial}{\partial X} - \dfrac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

$M \equiv m_1 + m_2, \qquad \mu \equiv \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - masa zredukowana

$$L(\vec R, \vec r, \dot{\vec R}, \dot{\vec r}) = \frac{1}{2} M \dot{\vec R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec r}^{\,2} - V(\vec r)$$

$$\begin{cases} M \ddot{\vec R} = 0 \\ \mu \ddot{\vec r} = -\nabla V(\vec r) \end{cases}$$ - swobodny ruch środka masy

Problem dwóch ciał został sprowadzony do problemu jednego ciała w zewnętrznym potencjale.

Siła grawitacyjnego oddziaływania $\vec F = G \dfrac{m_1 m_2}{r^2} \dfrac{\vec r}{r}$, $\quad \vec F \parallel \vec r$ siła centralna

Zachowanie momentu pędu

$$\vec J \equiv \vec r \times \vec p = m \vec r \times \dot{\vec r}\,, \qquad \frac{d\vec J}{dt} = m \underbrace{\dot{\vec r} \times \dot{\vec r}}_{=0} + m \vec r \times \ddot{\vec r} = \vec r \times \vec F \propto \underbrace{\vec r \times \vec r}_{=0} = 0$$

Wektory $\vec r$ i $\vec p$ leżą w niezmieniającej się w czasie płaszczyźnie – ruch odbywa się w płaszczyźnie.

Wykład VII cd. Mechanika

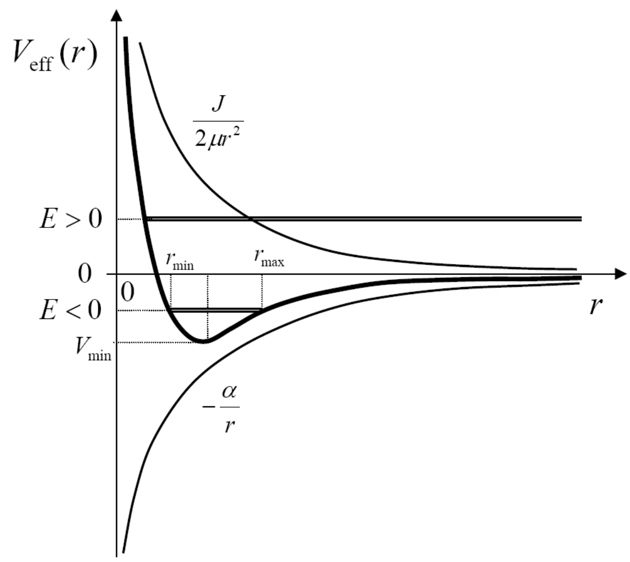
$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}})=\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2-V(\vec{r})=\frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-V(\vec{r})$$

Współrzędne biegunowe $L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi})=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-V(r)$

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(\mu r^2\dot{\varphi}\right)=0\\ \mu\ddot{r}-\mu r\dot{\varphi}^2+\frac{dV(r)}{dr}=0\end{cases}\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_i}=0,\quad i=1,2,\ldots N$$

$$\begin{cases}\frac{dJ}{dt}=0\ \Rightarrow\ J=\text{const}\\ \mu\ddot{r}=\frac{J^2}{\mu r^3}-\frac{dV(r)}{dr}=-\frac{d}{dr}\left(V(r)+\frac{J^2}{2\mu r^2}\right)\end{cases}\qquad J=|\vec{r}\times\vec{p}|=|\vec{r}\times\vec{p}_\varphi|=\mu r^2\dot{\varphi}$$

$$\boxed{\mu\ddot{r}=-\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr}}$$



$V(r)=-G\frac{m_1m_2}{r}\equiv-\frac{\alpha}{r}$ - potencjał grawitacyjny

$\frac{J^2}{2\mu r^2}$ - potencjał odśrodkowy

$V_{\text{eff}}(r)\equiv V(r)+\frac{J^2}{2\mu r^2}$ - potencjał efektywny

Radialne równanie ruchu nie ma jawnego rozwiązania.

Równanie toru

$$E=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+V(r)=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{J^2}{2\mu r^2}-\frac{\alpha}{r}=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+V_{\text{eff}}(r)=\text{const}\quad\text{(zachowanie energii)}$$

$$\begin{cases}J=\mu r^2\dot{\varphi}\\ E=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{J^2}{2\mu r^2}-\frac{\alpha}{r}\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{J}{\mu r^2}\\ \frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-\frac{J^2}{2\mu r^2}+\frac{\alpha}{r}\right)}\end{cases}\qquad \frac{d\varphi}{dr}=\frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dr}{dt}}=\frac{J}{\mu r^2\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-\frac{J^2}{2\mu r^2}+\frac{\alpha}{r}\right)}}$$

$$\left(E-\frac{J^2}{2\mu r^2}+\frac{\alpha}{r}>0\right)$$

$$\varphi-\varphi_0=\int_{r_0}^{r}\frac{dr'J}{\mu r'^2\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-\frac{J^2}{2\mu r'^2}+\frac{\alpha}{r'}\right)}}=-\frac{J}{\sqrt{2\mu E+\mu^2\alpha^2/J^2}}\int_{1/r_0}^{1/r}\frac{dz}{\sqrt{1-\frac{(Jz-\mu\alpha/J)^2}{2\mu E+\mu^2\alpha^2/J^2}}}$$

$$z=\frac{1}{r'}$$

$$\eta=\frac{Jz-\mu\alpha/J}{\sqrt{2\mu E+\mu^2\alpha^2/J^2}}$$

$$\varphi-\varphi_0=\int_{\eta(r_0)}^{\eta(r)}\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}=\int_{\arccos(\eta(r_0))}^{\arccos(\eta(r))}d\beta=\arccos(\eta(r))-\arccos(\eta(r_0))$$

$$\cos\eta=\beta$$

$$\varphi_0=\arccos(\eta(r_0))\quad\Rightarrow\quad\eta(r)=\cos\varphi\quad\Rightarrow\quad\frac{J/r-\mu\alpha/J}{\sqrt{2\mu E+\mu^2\alpha^2/J^2}}=\cos\varphi$$

Krzywa stożkowa $\boxed{r(\varphi)=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}}$ $p\equiv\frac{J^2}{\mu\alpha}$

Krzywa stożkowa		
$\varepsilon=0$	okrąg	$E=-\frac{\mu\alpha^2}{2J^2}$
$0<\varepsilon<1$	elipsa	$-\frac{\mu\alpha^2}{2J^2}<E<0$
$\varepsilon=1$	parabola	$E=0$
$\varepsilon>1$	hiperbola	$E>0$

$\varepsilon\equiv\sqrt{1+\frac{2J^2E}{\mu\alpha^2}}$ - mimośród

Ruch po okręgu

$$r=p=\frac{J^2}{\mu\alpha},\qquad\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr}=\frac{d}{dr}\left(-\frac{\alpha}{r}+\frac{J^2}{2\mu r^2}\right)=\frac{1}{r^2}\left(-\alpha+\frac{J^2}{\mu r}\right)=0\quad\Rightarrow\quad r=\frac{J^2}{\mu\alpha}$$

Ruch odbywa się po dnie potencjału efektywnego, $E=V_{\min}=-\frac{\mu\alpha^2}{2J^2}$

$$J=\mu r^2\dot{\varphi}\quad\Rightarrow\quad\dot{\varphi}=\frac{J}{\mu r^2},\quad v_\varphi=\frac{J}{\mu r}=\frac{\alpha}{J}$$

Opis ruchu po okręgu można otrzymać korzystając z warunku równowagi sił:

$$\frac{\mu v_\varphi^2}{r}=\frac{\alpha}{r^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{J^2}{\mu r^3}=\frac{\alpha}{r^2}\quad\Rightarrow\quad r=\frac{J^2}{\mu\alpha},\qquad E=\frac{\mu v_\varphi^2}{2}-\frac{\alpha}{r}=\frac{J^2}{2\mu r^2}-\frac{\alpha}{r}=-\frac{\mu\alpha^2}{2J^2}$$

Okres obiegu: $T=\frac{2\pi r}{v_\varphi}=\frac{2\pi J^3}{\mu\alpha^2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{\alpha\sqrt{\mu}}{|E|^{3/2}}$

<u>Wykład VII cd.</u> Mechanika

Prawa Keplera[1]

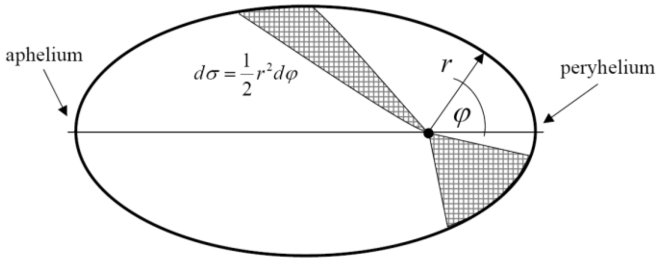
I prawo Keplera

Każda planeta Układu Słonecznego porusza się po elipsie, w której jednym ognisku znajduje się Słońce.

Ściśle rzecz biorąc ognisko odpowiada położeniu środka masy, ale Słońce jest dużo cięższe od planet więc leży blisko środka masy układu.

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$m_1 >> m_2 \quad \Rightarrow \quad \mu \approx m_2$$



II prawo Keplera

W równych jednostkach czasu promień wodzący planety zakreśla równe pola (prędkość polowa jest stała).

$$d\sigma = \frac{1}{2} r^2 d\varphi, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{J}{2\mu} = \text{const}$$

III prawo Keplera

Stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześcianu średniej arytmetycznej największego i najmniejszego oddalenia od Słońca jest stały dla wszystkich planet.

pole elipsy: $\sigma = \pi ab$

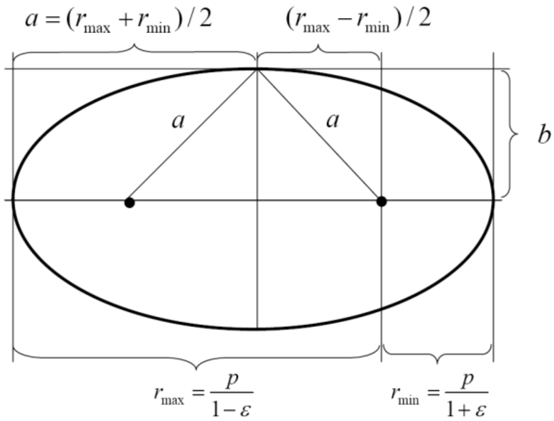
okres obiegu: $T = \frac{\sigma}{\dot{\sigma}} = 2\frac{\mu\sigma}{J}$

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{J}{\sqrt{2\mu|E|}}$$

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\alpha\sqrt{\mu}}{|E|^{3/2}}$$

$$\frac{r_{max} + r_{min}}{2} = a = \frac{\alpha}{2|E|}$$

$$\frac{T^2}{\left((r_{max} + r_{min})/2\right)^3} = \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \approx \frac{4\pi^2}{Gm_1}$$



[1] Johannes Kepler 1571-1630