<u>Wykład VIII</u> Mechanika

<u>Teoria małych drgań</u>

Mamy układ M ciał punktowych poddanych f więzom.

funkcja Lagrange'a: $L = T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, ...\dot{x}_{3M}) - V(x_1, x_2, ...x_{3M})$

więzy: $f_i(x_1, x_2, ...x_{3M}) = 0, \quad i = 1,2,...f$

stopnie swobody: $N = 3M - f$

współrzędne uogólnione: $\{q_1, q_2, ...q_N\}$

Zakładamy, że $V(q_1, q_2, ...q_N)$ ma minimum w $(q_1^0, q_2^0, ...q_N^0)$ i rozwijamy $V(q_1, q_2, ...q_N)$ wokół tego minimum

$$V(q_1, q_2, ...q_N) \approx V(q_1^0, q_2^0, ...q_N^0) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_i = q_i^0}}_{=0} (q_i - q_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_i = q_i^0,\, q_j = q_j^0} (q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0)$$

Macierz $K_{ij} \equiv \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_i = q_i^0,\, q_j = q_j^0}$ jest <u>symetryczna</u> tzn. $K_{ij} = K_{ji}$ i <u>dodatnio określona</u>, bo w $(q_1^0, q_2^0, ...q_N^0)$ jest minimum. Dodatnia określoność oznacza, że $\sum_{i,j=1}^{N} u_i K_{ij} u_j > 0$ dla dowolnych niezerowych wektorów rzeczywistych $\vec{u} = (u_1, u_2, ...u_N) \in R^N$.

Rozważamy teraz energię kinetyczną, która zapisujemy w postaci

$$T = \sum_{i=1}^{3M} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{i=1}^{3M} \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_i \right) \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{3M} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \ .$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$\Phi^{jk}(q_1, q_2, ...q_N) \equiv \sum_{i=1}^{3M} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

i definiujemy symetryczną macierz masy $M^{jk} = \Phi^{jk}(q_1^0, q_2^0, ...q_N^0)$, o której zakładamy, że jest dodatnio określona. Energię kinetyczną przybliżamy jako

$$T \approx \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} M_{kj} \dot{q}_j \dot{q}_k \ .$$

Wprowadzamy nowe współrzędne: $h_i \equiv q_i - q_i^0, \quad i = 1,2,...N$

funkcja Lagrange'a: $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\left(M_{ij}\dot{h}_i\dot{h}_j - K_{ij}h_ih_j\right)$

równania Lagrange'a: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L(h,\dot{h})}{\partial \dot{h}_i} - \frac{\partial L(h,\dot{h})}{\partial h_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots N$

$$\sum_{j=1}^{N}\left(M_{ij}\ddot{h}_j + K_{ij}h_j\right) = 0,$$

gdzie skorzystaliśmy z symetryczności macierzy M i K. Szukamy teraz rozwiązań w postaci: $h_i \equiv c_i e^{i\omega t}, \quad i = 1,2,...N$ („fizyczne" rozwiązanie odpowiada części rzeczywistej $\Re e^{i\omega t} = \cos\omega t$)

$$\sum_{j=1}^{N}\left(K_{ij} - \omega^2 M_{ij}\right)c_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\det\left(\hat{K} - \omega^2\hat{M}\right) = 0}$$

<u>Równanie charakterystyczne</u> $\det\left(\hat{K} - \omega^2\hat{M}\right) = 0$ jest równaniem stopnia N ze względu na ω^2 i ma co najwyżej N różnych rozwiązań.

<u>Twierdzenie</u>

Rozwiązania równania charakterystycznego są rzeczywiste $(\omega^2 \in R)$ i dodatnie $(\omega^2 > 0)$.

Dowód

$$\sum_{i=1}^{N}c_i^*\sum_{j=1}^{N}\left(K_{ij} - \omega^2 M_{ij}\right)c_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i,j=1}^{N}\left(K_{ij} - \omega^2 M_{ij}\right)c_i^* c_j = 0$$

$$c_j = a_j + ib_j, \quad a_j \equiv \Re c_j, \quad b_j \equiv \Im c_j$$

$$\sum_{i,j=1}^{N}\left(K_{ij} - \omega^2 M_{ij}\right)\left(a_i - ib_i\right)\left(a_j + ib_j\right) = \sum_{i,j=1}^{N}\left(K_{ij} - \omega^2 M_{ij}\right)\left(a_ia_j + b_ib_j + i(a_ib_j - b_ia_j)\right)$$

$$K_{ij} - \omega^2 M_{ij} = K_{ji} - \omega^2 M_{ji} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i,j=1}^{N}\left(K_{ij} - \omega^2 M_{ij}\right)\left(a_ib_j - b_ia_j\right) = 0$$

Równanie $\sum_{i,j=1}^{N}\left(K_{ij} - \omega^2 M_{ij}\right)c_i^* c_j = 0$ przybiera postać

$$\sum_{i,j=1}^{N}\left(K_{ij} - \omega^2 M_{ij}\right)\left(a_ia_j + b_ib_j\right) = 0$$

$$\omega^2\sum_{i,j=1}^{N}M_{ij}\left(a_ia_j + b_ib_j\right) = \sum_{i,j=1}^{N}K_{ij}\left(a_ia_j + b_ib_j\right)$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^{N}K_{ij}\left(a_ia_j + b_ib_j\right)}{\sum_{i,j=1}^{N}M_{ij}\left(a_ia_j + b_ib_j\right)}}$$

Ponieważ M_{ij}, K_{ij}, a_i, b_i są rzeczywiste, więc $\omega^2 \in R$, a ze względu na dodatnią określoność M_{ij}, K_{ij} mamy $\omega^2 > 0$.