Wykład X Mechanika

Formalizm kanoniczny

Formalizm kanoniczny wyprowadzamy z formalizmu Lagrange'a, traktując jako zmienne niezależne q_i i $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, $i = 1, 2, \ldots N$. Funkcję Hamiltona, która ma kluczowe znaczenie w formalizmie kanonicznym, otrzymujemy dokonując transformacji Legandre'a funkcji Lagrange'a

$\left(q \equiv \{q_1, q_2, \ldots, q_N\}, \quad \dot{q} \equiv \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N\}, \quad p \equiv \{p_1, p_2, \ldots, p_N\}\right)$,

$$\boxed{H(p,q,t) \equiv \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} - L(q,\dot{q},t) = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t)}$$

Należy rozumieć $\dot{q}$ jako funkcję zmiennych niezależnych q i p oraz t, $\dot{q}(q,p,t)$.

Równania Hamiltona (kanoniczne)

Na dwa sposoby zapisujemy różniczkę funkcji Hamiltona:

1) $dH = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H(p,q,t)}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H(p,q,t)}{\partial t} dt$

2) $dH = \sum_{i=1}^{N} d(\dot{q}_i p_i) - dL(q,\dot{q},t) = \sum_{i=1}^{N} \left(d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i \right) - \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$

$$dH = \sum_{i=1}^{N} \left(d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i \right) - \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Zakładamy, że zachodzą równania Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$$

2') $dH = \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$

Porównując 1) i 2') dostajemy:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots N \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}}$$

Przykład

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \qquad \dot{q} = \frac{\partial H(p,q)}{\partial p} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -\frac{dV(q)}{dq}$$

Wykład X cd. Mechanika

Zasada zachowania energii

$$\frac{dH(p,q,t)}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)+\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial t}=\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial t}$$

zakładamy, że zachodzą równania Hamiltona

Zasada najmniejszego działania

$$S\equiv\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\sum_{i=1}^{N}\dot{q}_i p_i-H(p,q,t)\right),\quad q(t_1)=q_1,\quad q(t_2)=q_2$$

$$\left(q\equiv\{q_1,q_2,\dots,q_N\},\quad p\equiv\{p_1,p_2,\dots,p_N\},\quad \delta q\equiv\{\delta q_1,\delta q_2,\dots,\delta q_N\},\quad \delta p\equiv\{\delta p_1,\delta p_2,\dots,\delta p_N\}\right)$$

Poszukujemy $q(t)$ i $p(t)$, które minimalizują działanie *S*. Wymaga to, aby zmiana działania δS na skutek infintezymalnej transformacji $\begin{cases} q(t)\to q(t)+\delta q(t)\\ p(t)\to p(t)+\delta p(t)\end{cases}$, $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$ znikała.

$$\delta S\equiv S[p+\delta p,q+\delta q]-S[p,q]$$ (nie wymagamy $\delta p(t_1)=\delta p(t_2)=0$)

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_{i=1}^{N}\left(\delta\dot{q}_i p_i+\dot{q}_i\delta p_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i-\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right)$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\delta q_i p_i\Big|_{t_1}^{t_2}}_{=0}-\int_{t_1}^{t_2}dt\sum_{i=1}^{N}\left(\delta q_i\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}+\dot{p}_i\right)+\delta p_i\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}-q_i\right)\right)$$

$$\delta S=0\quad\Rightarrow\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial q_i},\quad \dot{q}_i=\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_i},\quad i=1,2,\dots N$$

Nawiasy Poissona[1]

Mamy dowolna wielkość $f(p,q,t)$ i obliczamy jej pochodną czasową zakładając, że $q(t)$ i $p(t)$ spełniają równania ruchu

$$\frac{df(p,q,t)}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{df(p,q,t)}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{H,f\}}$$

$$\{A,B\}\equiv\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}-\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}\right)$$ - nawias Poissona

[1] Siméon Denis Poisson 1781-1840

Wykład X cd. — Mechanika

Własności nawiasów Poissona

Antysymetria: $\{A,B\}=-\{B,A\}$

Liniowość: $\{A+B,C\}=\{A,C\}+\{B,C\}$

Tożsamość Jacobiego[2]: $\{A,\{B,C\}\}+\{C,\{A,B\}\}+\{B,\{C,A\}\}=0$

Dowodzi się prostym, lecz dość długim obliczeniem

Całka ruchu: $\frac{df}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad f$ - całka ruchu

Twierdzenie Poissona

Jeśli $f(p,q,t)$ i $g(p,q,t)$ są całkami ruchu, to $h(p,q,t)=\{f,g\}$ też jest całką ruchu.

Dowód

$$\frac{dh}{dt}=\frac{\partial h}{\partial t}+\{H,h\}=\frac{\partial\{f,g\}}{\partial t}+\{H,\{f,g\}\}$$

1) $\frac{\partial\{f,g\}}{\partial t}=\left\{\frac{\partial f}{\partial t},g\right\}+\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}$

2) $\{H,\{f,g\}\}=-\{f,\{g,H\}\}-\{g,\{H,f\}\}=\{f,\{H,g\}\}-\{g,\{H,f\}\}=-\left\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\right\}+\left\{g,\frac{\partial f}{\partial t}\right\}$

$$\frac{df}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \{H,f\}=-\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{dg}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \{H,g\}=-\frac{\partial g}{\partial t},$$

1) + 2) $\frac{dh}{dt}=0$

Przykład

$J_x=yp_z-zp_y$ - składowa x momentu pędu

$J_y=zp_x-xp_z$ - składowa y momentu pędu

$$\{J_x,J_y\}=\frac{\partial J_x}{\partial p_x}\frac{\partial J_y}{\partial x}+\frac{\partial J_x}{\partial p_y}\frac{\partial J_y}{\partial y}+\frac{\partial J_x}{\partial p_z}\frac{\partial J_y}{\partial z}-\frac{\partial J_x}{\partial x}\frac{\partial J_y}{\partial p_x}-\frac{\partial J_x}{\partial y}\frac{\partial J_y}{\partial p_y}-\frac{\partial J_x}{\partial z}\frac{\partial J_y}{\partial p_z}$$

$$\frac{\partial J_x}{\partial p_x}=\frac{\partial J_y}{\partial p_y}=\frac{\partial J_x}{\partial x}=\frac{\partial J_y}{\partial y}=0$$

$$\{J_x,J_y\}=\frac{\partial J_x}{\partial p_z}\frac{\partial J_y}{\partial z}-\frac{\partial J_x}{\partial z}\frac{\partial J_y}{\partial p_z}=yp_x-xp_y=J_z$$

Jeśli zachowywane są x-owa i y-owa składowe momentu pędu, to zachowywana jest także z-owa składowa momentu pędu.

---

[2] Karl Gustav Jacob Jacobi 1804-1851