Wykład XI — Mechanika

Przekształcenia kanoniczne

W formalizmie Lagrange'a możemy dowolnie zmieniać współrzędne uogólnione, a postać równań ruch nie ulega zmianie tzn. jeśli wprowadzimy współrzędne $Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, to spełniają one równania $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0$, jeśli q_i spełniają $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

W formalizmie Hamiltona tak nie jest, bo q_i i p_i musza spełniać jeszcze związek $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

<u>Definicja</u>

Transformacja $\begin{cases} q_i \to Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ p_i \to P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{cases} \quad i = 1,2,\ldots,n$

nazywa się <u>kanoniczną</u> jeśli Q_i i P_i spełniają równania kanoniczne. Tzn. jeśli q_i i p_i spełniają

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(p,q,t)}{\partial q_i} \tag{1}$$

to Q_i i P_i mają spełniać

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'(P,Q,t)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'(P,Q,t)}{\partial Q_i} \tag{2}$$

gdzie H' jest nową funkcja Hamiltona $H'(P,Q,t) \equiv H\big(p(Q,p), q(Q,p), t\big)$.

Warunki, które musi spełniać transformacja, żeby była kanoniczną można otrzymać z zasady wariacyjnej Hamiltona. Równania (1) bowiem wynikają ze znikania wariacji

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i - H(p,q,t) \right) = 0$$

natomiast równania (2) z

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^{N} \dot{Q}_i P_i - H'(P,Q,t) \right) = 0 .$$

Ponieważ $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ oraz $\delta Q(t_1) = \delta Q(t_2) = 0$, więc do każdej funkcji podcałkowej można dodać zupełną pochodną dowolnej funkcji współrzędnych i czasu, odpowiednio $\frac{dg(q,t)}{dt}$ lub $\frac{dG(Q,t)}{dt}$, gdyż

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dg(q,t)}{dt} = \delta\big[g(q(t_2), t_2) - g(q(t_1), t_1) \big] = 0 .$$

A zatem różnicą funkcji podcałkowych może być $\frac{dF(q,Q,t)}{dt}$, tzn.

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i p_i - H(p,q,t) - \sum_{i=1}^{N} \dot{Q}_i P_i + H'(P,Q,t) = \frac{dF(q,Q,t)}{dt}$$

co daje

$$\sum_{i=1}^{N} p_i dq_i - H(p,q,t)dt - \sum_{i=1}^{N} P_i dQ_i + H'(P,Q,t)dt = dF(q,Q,t) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i\right) + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

Przy dowolnych dq_i oraz dQ_i dla $i = 1, 2, \ldots n$ dostajemy

$$p_i = \frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial Q_i}, \qquad H(p,q,t) - H'(P,Q,t) = -\frac{\partial F(q,Q,t)}{\partial t}$$

co prowadzi do związku

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 F(q,Q,t)}{\partial q_i \partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$$

$F(q,Q,t)$ nazywa się funkcja tworząca transformacji kanonicznej.

Definiujemy nową funkcję tworzącą $\Phi(q,P,t) \equiv F(q,Q(q,P),t) + \sum_i Q_i P_i$,

$$d\Phi = dF + \sum_i \left(P_i dQ_i + Q_i dP_i\right)$$

Jak poprzednio, żądamy

$$\sum_{i=1}^{N} p_i dq_i - H(p,q,t)dt - \sum_{i=1}^{N} P_i dQ_i + H'(P,Q,t)dt = dF = d\Phi(q,P,t) - \sum_i \left(P_i dQ_i + Q_i dP_i\right)$$

Uwzględniając, że

$$d\Phi(q,P,t) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} dP_i\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt,$$

dostajemy

$$p_i = \frac{\partial \Phi(q,P,t)}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial \Phi(q,P,t)}{\partial P_i}, \qquad H(p,q,t) - H'(P,Q,t) = -\frac{\partial \Phi(q,P,t)}{\partial t}$$

co daje

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 \Phi(q,P,t)}{\partial q_i \partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$$

Jeśli transformacja $\begin{cases} q_i \to Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) \\ p_i \to P_i(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) \end{cases}$ $i = 1,2,\ldots,n$

jest kanoniczna to

$$\boxed{\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}} \tag{3}$$

Nawiasy Poissona

Bezpośrednio z definicji nawiasów Poissona mamy

$$\{q_i, q_j\}_{pq} = 0 = \{p_i, p_j\}_{pq}, \qquad \{p_i, q_j\}_{pq} = \delta^{ij}$$

$\{\ldots,\ldots\}_{pq}$ - nawias Poissona obliczany przy użyciu współrzędnych i pędów p i q.

Równanie (3) zaś daje

$$\{Q_i, Q_j\}_{pq} = 0 = \{P_i, P_j\}_{pq}, \qquad \{P_i, Q_j\}_{pq} = \delta^{ij}$$

co dowodzi się prostym przeliczeniem.

Twierdzenie

Nawias Poissona dwóch dowolnych wielkości f i g jest niezmiennikiem transformacji kanonicznej tzn.

$$\boxed{\{f, g\}_{pq} = \{f, g\}_{PQ}}$$

Dowodzi się dosyć żmudnym przeliczeniem.

Twierdzenie

Zachodzenie związków

$$\boxed{\{Q_i, Q_j\}_{pq} = 0 = \{P_i, P_j\}_{pq}, \qquad \{P_i, Q_j\}_{pq} = \delta^{ij}}$$

jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, że transformacja $(q, p, H) \to (Q, P, H')$ jest kanoniczna.

Konieczność została wykazana powyżej. Dostateczność łatwo wykazać dla transformacji niezależnych od czasu. Wtedy

$$\dot{Q}_i = \{H, Q_i\}_{pq} = \{H, Q_i\}_{PQ} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial P_j}\frac{\partial Q_i}{\partial Q_j} = \sum_j \frac{\partial H}{\partial P_j}\delta^{ij} = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

$$\dot{P}_i = \{H, P_i\}_{pq} = \{H, P_i\}_{PQ} = -\sum_j \frac{\partial H}{\partial Q_j}\frac{\partial P_i}{\partial P_j} = -\sum_j \frac{\partial H}{\partial Q_j}\delta^{ij} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

Ogólny dowód pomijam.

Wykład XI cd. Mechanika

Twierdzenie

Jakobian transformacji kanonicznej jest równy jedności.

Dowód

$$J \equiv \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_n} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

Korzystamy z własności jakobianów dotyczącej złożenia transformacji $(X) \to (Y) \to (Z)$:

$$\frac{\partial(X)}{\partial(Y)} = \frac{\partial(X)/\partial(Z)}{\partial(Y)/\partial(Z)}$$

$$J \equiv \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} = \frac{\partial(Q,P)/\partial(q,P)}{\partial(q,p)/\partial(q,P)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial(Q)}{\partial(q)} & \frac{\partial(P)}{\partial(q)} \\ \frac{\partial(Q)}{\partial(P)} & \frac{\partial(P)}{\partial(P)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial(q)}{\partial(q)} & \frac{\partial(p)}{\partial(q)} \\ \frac{\partial(q)}{\partial(P)} & \frac{\partial(p)}{\partial(P)} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial(Q)}{\partial(q)} & \frac{\partial(P)}{\partial(q)} \\ 0 & \mathbf{1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ \frac{\partial(q)}{\partial(P)} & \frac{\partial(p)}{\partial(P)} \end{vmatrix}} = \frac{\left|\frac{\partial(Q)}{\partial(q)}\right|}{\left|\frac{\partial(p)}{\partial(P)}\right|} = \frac{|A|}{|A^T|} = 1$$

gdzie macierz $A^{ij} \equiv \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j}$, A^T oznacza macierz transponowaną $\left(|A^T| = |A|\right)$.