Wykład XII Mechanika

Ewolucja układu w przestrzeni fazowej

Definicja

Przestrzeń fazowa to przestrzeń rozpinana przez wszystkie współrzędne i pędy układu: $\{q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Twierdzenie

Przez każdy punkt przestrzeni fazowej przechodzi
jedna i tylko jedna trajektoria danego układu.

Twierdzenie jest konsekwencją jednoznaczności rozwiązań równań ruchu przy zadanych warunkach początkowych.

Przykład – Oscylator harmoniczny

$H(p,q) = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2} m\omega^2 q^2$ - jeden stopień swobody

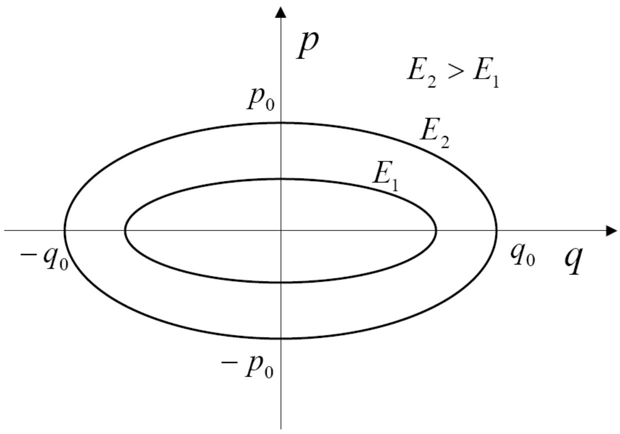
$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{p}{m} \\ \dot{p} = -m\omega^2 q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

$$\begin{cases} q(t) = q(0)\cos\omega t + \dfrac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t \\ p(t) = -m\omega\, q(0)\sin\omega t + p(0)\cos\omega t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{p^2(t)}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2(t) = \text{const}$$

Równanie toru w przestrzeni fazowej jest elipsą

$$\frac{p^2(t)}{p_0^2} + \frac{q^2(t)}{q_0^2} = 1,$$

$$p_0 \equiv \sqrt{2mE}, \quad q_0 \equiv \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$



Twierdzenie

Ewolucji czasowej układu odpowiada transformacja kanoniczna

$$\begin{cases} Q_i = q_i(t) = Q_i(p(0), q(0), t) \\ P_i = p_i(t) = P_i(p(0), q(0), t) \end{cases}$$

Dowód

Równania ruch są spełnione w każdej chwili czasu.

Wykład XII cd. Mechanika

Twierdzenie Liouville'a[1]

Objętość przestrzeni fazowej zajmowanej przez zespół identycznych układów $\Gamma(t)$ jest stała w czasie,

$$\Gamma(t) \equiv \int_{\Omega(t)} dq_1 dq_2 \ldots dq_n dp_1 dp_2 \ldots dp_n = \text{const}$$

$\Omega(t)$ określa zmieniające się w czasie granice zajmowane przez zespół układów w przestrzeni fazowej.

Dowód

Dla $t = 0$ mamy $\Gamma(0) \equiv \int_{\Omega(0)} dq_1 dq_2 \ldots dq_n dp_1 dp_2 \ldots dp_n$,

a teraz dokonujemy zależnej od czasu transformacji $\begin{cases} Q_i = q_i(t) = Q_i(p(0), q(0), t) \\ P_i = p_i(t) = P_i(p(0), q(0), t) \end{cases}$,

w której $q_i(t)$ i $p_i(t)$ są rozwiązaniami równań ruchu tzn. ewolucję czasową układu traktujemy jako transformację kanoniczną i mamy

$$\Gamma(0) = \int_{\Omega(t)} dQ_1 dQ_2 \ldots dQ_n dP_1 dP_2 \ldots dP_n \frac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)}$$

Ponieważ $\dfrac{\partial(q,p)}{\partial(Q,P)} = 1$, mamy

$$\Gamma(0) = \int_{\Omega(t)} dQ_1 dQ_2 \ldots dQ_n dP_1 dP_2 \ldots dP_n = \Gamma(t).$$

[1] Joseph Liouville 1809-1882

Wykład XII cd. Mechanika

Uproszczony dowód

Rozważamy zespół układów o jednym stopniu swobody zajmujących infinitezymalnie małą objętość w przestrzeni fazowej $\Delta\Gamma(t) \equiv \Delta q(t)\Delta p(t)$, gdzie $\Delta q(t) \equiv q_{\max}(t) - q_{\min}(t)$ oraz $\Delta p(t) \equiv p_{\max}(t) - p_{\min}(t)$. Układy należące do zespołu mają współrzędne $q(t)$ z zakresu $[q_{\min}(t), q_{\max}(t)]$ i pędu $p(t)$ z zakresu $[p_{\min}(t), p_{\max}(t)]$.

$$\frac{d\Delta\Gamma}{dt} = \frac{d\Delta q}{dt}\Delta p + \Delta q \frac{d\Delta p}{dt}$$

$$\frac{d\Delta q}{dt} = \Delta\dot{q} = \frac{\Delta\dot{q}}{\Delta q}\Delta q = \frac{\partial\dot{q}}{\partial q}\Delta q\,, \quad \frac{d\Delta p}{dt} = \Delta\dot{p} = \frac{\Delta\dot{p}}{\Delta p}\Delta p = \frac{\partial\dot{p}}{\partial p}\Delta p$$

$$\frac{d\Delta\Gamma}{dt} = \frac{\partial\dot{q}}{\partial q}\Delta q\Delta p + \Delta q\frac{\partial\dot{p}}{\partial p}\Delta p = \left(\frac{\partial\dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial\dot{p}}{\partial p}\right)\Delta q\Delta p = \left(\frac{\partial\dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial\dot{p}}{\partial p}\right)\Delta\Gamma$$

Zakładamy, że $q(t)$ i $p(t)$ spełniają równania ruchu: $\dot{q} = \dfrac{\partial H(p,q,t)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\dfrac{\partial H(p,q,t)}{\partial q}$.

$$\frac{d\Delta\Gamma}{dt} = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\right)\Delta\Gamma = 0$$

Uogólnienie na *n* stopni swobody

$$\Delta\Gamma(t) \equiv \Delta q_1(t)\,\Delta p_1(t)\,\Delta q_2(t)\,\Delta p_2(t)\ldots\Delta q_n(t)\,\Delta p_n(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\Gamma}{dt} &= \left(\frac{d\Delta q_1}{dt}\Delta p_1 + \Delta q_1\frac{d\Delta p_1}{dt}\right)\Delta q_2(t)\,\Delta p_2(t)\ldots\Delta q_n(t)\,\Delta p_n(t)\\ &\quad + \Delta q_1(t)\,\Delta p_1(t)\left(\frac{d\Delta q_2}{dt}\Delta p_2 + \Delta q_2\frac{d\Delta p_2}{dt}\right)\Delta q_3(t)\,\Delta p_3(t)\ldots\Delta q_n(t)\,\Delta p_n(t)\\ &\quad + \ldots + \Delta q_1(t)\,\Delta p_1(t)\ldots\Delta q_{n-1}(t)\,\Delta p_{n-1}(t)\left(\frac{d\Delta q_n}{dt}\Delta p_n + \Delta q_n\frac{d\Delta p_n}{dt}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{d\Delta q_i}{dt} = \Delta\dot{q}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta\dot{q}_i}{\Delta q_k}\Delta q_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_k}\Delta q_k\,,$$

$$\frac{d\Delta p_i}{dt} = \Delta\dot{p}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta\dot{p}_i}{\Delta p_k}\Delta p_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_k}\Delta p_k$$

$$\frac{d\Delta\Gamma}{dt} = \frac{1}{n}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_k}\right)\Delta\Gamma$$

Zakładamy, że $q_i(t)$ i $p_i(t)$ spełniają równania ruchu: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H(p,q,t)}{\partial q_i}$.

$$\frac{d\Delta\Gamma}{dt} = \frac{1}{n}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_k\partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_k\partial q_i}\right)\Delta\Gamma = \frac{1}{n}\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_k\partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial q_k}\right)\Delta\Gamma = 0$$