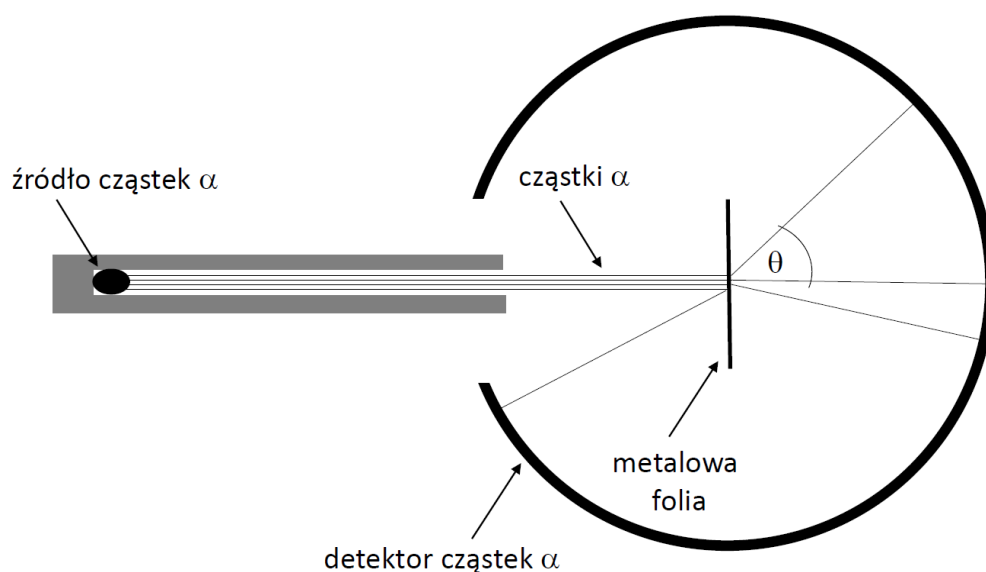


Atom

Badania zmierzające do poznania i zrozumienia struktury atomu przyczyniły się w ogromnej mierze do ukształtowania metod fizyki kwantowej tak doświadczalnej jak i teoretycznej. Opisana też została i wyjaśniona budowa atomu.

Doświadczenie Geigera-Marsdena

Doświadczenie, a właściwie cała seria doświadczeń wykonanych przez Hansa Geigera i Ernesta Marsdena pod kierunkiem Ernesta Rutherforda w latach 1908-1913 pozwoliła poznać strukturę atomu. W doświadczeniach tych badano rozpraszanie cząstek alfa na cienkich metalowych foliach. Schemat układu eksperymentalnego przedstawia rysunek.



Cząstki alfa pochodzące z radioaktywnego źródła padają na cienką metalową folię. Większość z nich przechodzi przez folię niemal nie zmieniając kierunku swojego ruchu, pozostałe natomiast ulegają rozproszeniu – ich tor odchyła się od początkowego o kąt θ . Wraz ze wzrostem tego kąta ubywa rozproszonych cząstek, lecz występują i takie, które zostają odchyłone całkowicie do tyłu tj. o kąt $\theta = 180^\circ$. Rozproszone cząstki alfa rejestrowane są przez detektor czy układ detektorów otaczających folię. Cały układ umieszczony jest w komorze próżniowej, aby wyeliminować oddziaływanie cząstek alfa z powietrzem.

Planetarny model atomu

Analizując wyniki pomiarów Geigera i Marsdena, Rutherford doszedł do wniosku, że rozpraszanie cząstek alfa faktycznie zachodzi na ciężkich obdarzonych dodatnim ładunkiem obiektach dużo mniejszych niż same atomy. Tym samym Rutherford przedstawił *planetarny model atomu*, w którym lekkie, ujemnie naładowane elektrony okrążają ciężkie naładowane dodatnio jądro. Atom jako całość jest elektrycznie neutralny, gdyż ładunek jądra jest kompensowany przez sumę ładunków elektronów.

Przekrój czynny Rutherforda

Wniosek o istnieniu niedużego, lecz ciężkiego naładowanego dodatnio jądra atomowego, Rutherford sformułował na podstawie analizy rozkładu kąta rozproszenia cząstek alfa. Prześledzimy to rozumowanie, wyprowadzając słynną formułę opisującą kątowny rozkład rozproszonych cząstek. W tym celu rozważamy ruch naładowanej cząstki alfa w odpychającym polu Coulomba wytwarzanym przez jądro atomowe, o którym zakładamy, że jest dużo cięższe od cząstki alfa.

Po pierwsze stwierdzamy, że ruch cząstki alfa odbywa się w płaszczyźnie, co wynika z zachowania jej momentu pędu w polu siły centralnej, czyli siły działającej wzdłuż prostej łączącej źródło siły i obiekt, na który ta siła działa. Moment pędu danego punktu materialnego definiujemy jako

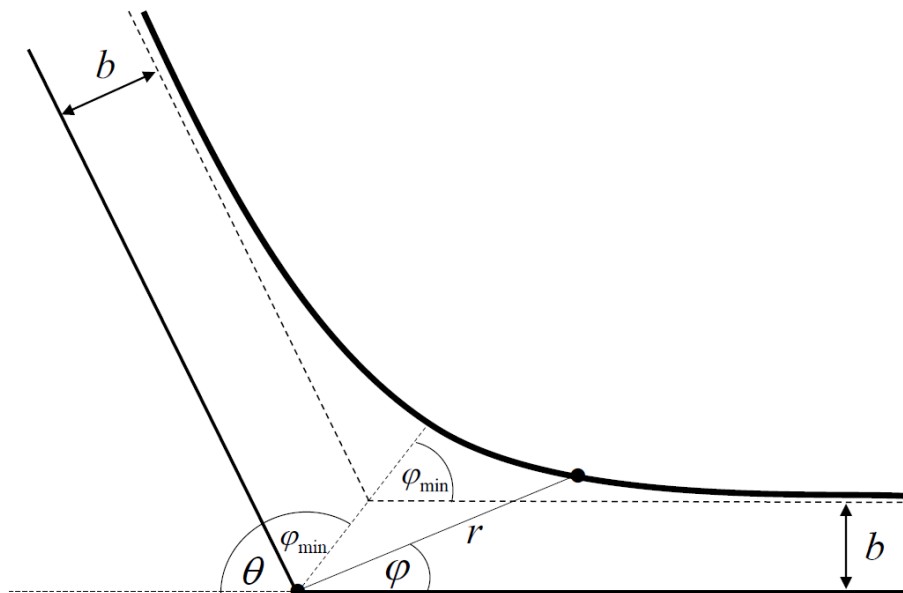
$$\vec{J} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}},$$

gdzie \vec{r} jest wektorem położenia punktu, \vec{p} jego pędem, a zachowanie momentu pędu dowodzimy prostym rachunkiem

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} \propto \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_{=0} = 0.$$

Wektory \vec{r} i \vec{p} leżą więc w niezmienniejącej się w czasie płaszczyźnie prostopadłej do wektora \vec{J} .

Skoro ruch cząstki zachodzi w płaszczyźnie, wygodnie jest go opisywać z pomocą współrzędnych biegunowych. Trajektorię cząstki parametryzujemy więc odległością od centrum rozpraszania r i kątem φ . Tor cząstki przedstawia rysunek, na którym zaznaczono zmienne (r, φ) , a także parametr zderzenia b , kąt φ_{\min} , odpowiadający minimalnej odległości cząstki alfa od centrum sił, a także kąt rozproszenia θ , który, jak widać na rysunku, równy jest $\theta = \pi - 2\varphi_{\min}$.



Aby znaleźć rozkład kąta rozproszenia cząstek alfa θ jako funkcję parametru zderzenia b , nie musimy rozwiązać odpowiednich równań ruchu, wystarczy się tylko odwołać do dwóch praw zachowania: momentu pędu i energii.

Wielkość momentu pędu cząstki alfa we współrzędnych biegunowych znajdujemy jako

$$J = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r} \times \vec{p}_\varphi| = mr^2 \dot{\varphi} = \text{const} ,$$

gdzie \vec{p}_φ jest aksjalną składową pędu, $\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{dt}$ to prędkość kątowna. Całkowita energia cząstki równa jest

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} = \text{const} .$$

$V(r) = \frac{\alpha}{r}$ jest energią potencjalną, przy czym współczynnik α wynosi $\alpha = Z_1 Z_2 e^2$, gdy jądro o liczbie porządkowej Z_1 oddziałuje z jądrem o liczbie porządkowej Z_2 .

Wykład III cd.

Podstawy fizyki kwantowej

Z wyrażenia na moment pędu wyliczamy prędkość kątową $\dot{\varphi}$ jako

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{J}{mr^2},$$

a z wyrażenia na energię \dot{r}

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \right)}.$$

Zakładamy tutaj, że $E - \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \geq 0$, aby wyrażenie pod pierwiastkiem było nieujemne. Biorąc stosunek tych wielkości otrzymujemy

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = \frac{J}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \right)}}.$$

A zatem

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \frac{dr' J}{mr'^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{J^2}{2mr'^2} - \frac{\alpha}{r'} \right)}}.$$

Nas interesuje kąt φ_{\min} , odpowiadający minimalnej odległości r_{\min} cząstki alfa od centrum, gdyż określa on kąt rozproszenia $\theta = \pi - 2\varphi_{\min}$. Odległość r_{\min} znajdujemy jako miejsce zerowe pochodnej

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{mr^2}{J} \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \right)} = 0,$$

co prowadzi do równania kwadratowego

$$E - \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2mE r^2 - 2m\alpha r - J^2 = 0,$$

którego rozwiązaniem jest wyrażenie

$$r_{\min} \equiv \frac{m\alpha + \sqrt{m^2\alpha^2 + 2mEJ^2}}{2mE}.$$

Interesujący nas kąt znajdujemy więc jako

$$\varphi_{\min} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{drJ}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \right)}} = \frac{J}{\sqrt{2mE}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x(x+b)}} ,$$

gdzie $x = r - r_{\min} = r - a$ oraz

$$a \equiv r_{\min} \equiv \frac{m\alpha + \sqrt{m^2\alpha^2 + 2mEJ^2}}{2mE}, \quad b \equiv \frac{\sqrt{m^2\alpha^2 + 2mEJ^2}}{mE}.$$

Ponieważ $b > a \geq 0$, więc potrzeba nam całka wynosi

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x(x+b)}} = \frac{1}{\sqrt{ab-a^2}} \arccos\left(\frac{2a-b}{b}\right)$$

i ostatecznie znajdujemy

$$\cos \varphi_{\min} = \frac{m\alpha}{\sqrt{m^2\alpha^2 + 2mEJ^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + m^2v^4b^2}},$$

gdzie wyraziliśmy jeszcze energię cząstki przez początkową prędkość v , gdy cząstka znajduje się daleko od centrum rozpraszania, moment pędu zaś przez tę prędkość i parametr zderzenia b , czyli

$$E = \frac{mv^2}{2}, \quad J = mvb.$$

Kąt rozproszenia równy $\theta = \pi - 2\varphi_{\min}$, określa więc formuła

$$\cos \varphi_{\min} = \cos \frac{\pi - \theta}{2} = \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + m^2v^4b^2}}.$$

Zgodnie z oczekiwaniami $\theta = 0$, gdy $b = \infty$, natomiast $\theta = \pi$ dla $b = 0$.

Zamiast operować rozkładem kąta rozproszenia cząstek, który zależy od intensywności wiązki cząstek padających na tarczę, wprowadzimy ważną wielkość $d\sigma$ zwaną różniczkowym przekrojem czynnym określoną jako

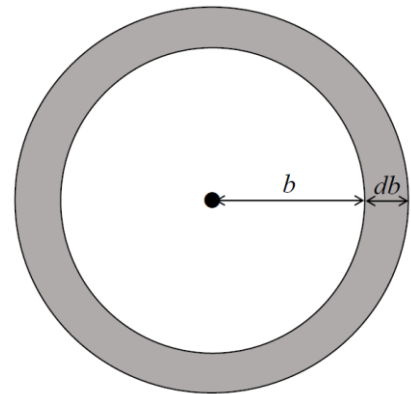
$$d\sigma \equiv \frac{dN}{\rho u},$$

gdzie dN jest liczbą cząstek rozproszonych pod kątem z przedziału $(\theta, \theta + d\theta)$, ρ jest gęstością wiązki, zaś u prędkością cząstek wiązki względem tarczy. Iloczyn ρu mówi, ile cząstek wiązki pada w jednostce czasu na jednostkową powierzchnię prostopadłą do kierunku wiązki. Przekrój czynny, który ma wymiar powierzchni, zależy tylko od oddziaływania pocisku z tarczą nie zaś od warunków eksperymentu.

Wykład III cd.

Podstawy fizyki kwantowej

Aby cząstka oddziaływała z jądrem a parametr zderzenia wynosił b , musi ona trafić w pierścień o powierzchni $2\pi b db$ pokazany na rysunku. Innymi słowy, przekrój czynny $d\sigma$ na oddziaływanie z parametrem zderzenia b jest równy powierzchni pierścienia i wynosi $d\sigma = 2\pi b db$. A zatem różniczkowy przekrój czynny znajdujemy jako



$$d\sigma = 2\pi b(\theta) \left| \frac{db}{d\theta} \right| d\theta.$$

Ponieważ

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + m^2 v^4 b^2}} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\alpha}{mv} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2},$$

A zatem

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \frac{\sin \theta}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\theta,$$

gdzie wykorzystaliśmy tożsamość $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$. Zwykle rozważamy rozpraszanie w kąt bryłowy $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, co pozwala zapisać słynny wzór na przekrój Rutherforda w postaci

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Wyprowadzony przekrój czynny ma kilka ciekawych własności. Nie zależy on od znaku współczynnika α , co oznacza, że rozkład kąta rozpraszania jest taki sam zarówno dla przyciągania Coulomba jak i odpychania. Rutherfordowski przekrój staje się nieskończony, gdy kąt θ dąży do zero. Powoduje to, że całkowity przekrój czynny, czyli

$$\sigma = \int d\Omega d\sigma,$$

jest nieskończony. Jest to skutkiem nieskończonego zasięgu siły Coulomba, co sprawia, że cząstki oddziaływujące nawet z nieskończenie wielkim parametrem zderzenia ulegają rozproszeniu tyle, że o nieskończenie mały kąt. W rzeczywistości, gdy parametr zderzenia jest większy niż promień atomu, ładunek jądra jest ekranowany, więc rozpraszana cząstka już nie oddziałuje z jądrem.

Kłopoty z planetarnym model atomu

Wyprowadzony przez Rutherforda przekrój czynny świetnie się zgadzał z wynikami pomiarów Geigera i Marsdena, a jednak planetarny model atomu nie mógł być poprawny i to z dwóch ważnych powodów.

- Elektron okrążając jądro atomowe porusza się z przyspieszeniem, co zgodnie z elektrodynamiką klasyczną wymusza emisję promieniowania. Elektron więc traci energię i ostatecznie spada na jądro. Atomy więc nie byłyby stabilne.
- Atomy mają rozmiary ok. 10^{-10} m, natomiast zgodnie z planetarnym modelem, atomy mogą być zupełnie dowolnych rozmiarów, określanych jedynie przez wartości energii i momentu pędu elektronów.

Model Bohra atomu wodoru

W 1913 roku Niels Bohr zaproponował kwantowy model atomu, który miał usunąć trudności modelu klasycznego. Bohr, rozważając najprostszy atom wodoru, składający się z jądra (tworzonego przez proton, o czym w owym czasie nie wiedzano) i jednego elektronu, przyjął, że na orbicie stacjonarnej elektron nie promieniuje, a jego moment pędu jest całkowitą wielokrotnością stałej Plancka $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$. Siła elektrostatycznego przyciągania zaś jest równoważona przez siłę odśrodkową bezwładności.

Dla uproszczenia rozważań zakładamy dalej, że orbita jest okręgiem o promieniu r oraz że środek masy pokrywa się z położeniem protonu, co jest uzasadnione, gdyż masa elektronu m jest blisko 2000 razy mniejsza od masy protonu. Moment pędu przybiera wtedy wartości

$$J = mrv = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \Rightarrow \quad v = \frac{n\hbar}{mr},$$

a warunek równowagi sił ma postać i prowadzi do wyrażenia na promień orbity

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{n^2\hbar^2}{me^2}$$

Wielkość $a_B \equiv \frac{\hbar^2}{me^2} = 5,3 \cdot 10^{-11}$ m zwana jest promieniem Bohra. Zwróćmy uwagę, że określone rozmiary atomów wymagają istnienia stałej Plancka! Gdyby jej nie było, atomy byłyby, tak jak orbity planet, najróżniejszych rozmiarów.

Wykład III cd.

Podstawy fizyki kwantowej

Energia kinetyczna elektronu i potencjalna są dane wzorami

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{2r} = \frac{me^4}{2n^2\hbar^2}, \quad V = -\frac{e^2}{r} = -\frac{me^4}{n^2\hbar^2},$$

więc energia całkowita wynosi

$$E_n = T + V = -\frac{me^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{R}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$R \equiv \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV}$$

jest tzw. stałą Rydberga. Widzimy, że energia jest skwantowana!

Linie spektralne

Bohr przyjął, że jeśli elektron znajduje się na orbicie n' i przechodzi na niższą orbitę n ($n' > n$), to wyemitowany foton ma energię:

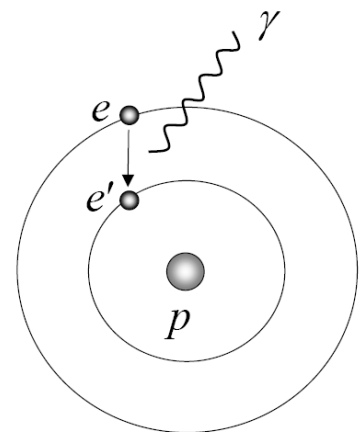
$$E_\nu = E_{n'} - E_n = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$$

Częstotliwość (częstość) promieniowania wynosi

$$\nu_{n'n} = \frac{R}{h} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \quad \left(\omega_{n'n} = \frac{R}{\hbar} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \right).$$

Widzimy, że częstość promieniowania przybiera ściśle określone wartości – linie spektralne, które odkryte na przełomie XIX i XX wieku stanowiły wielką zagadkę. Linie tworzą serie. Gdy $n=1$ a $n'=2, 3, 4, \dots$ mamy do czynienia z serią Lymana, jeśli $n=2$ a $n'=3, 4, 5, \dots$ z serią Balmera, a kiedy $n=3$ zaś $n'=4, 5, 6, \dots$ mamy serię Paschena.

Wyjaśnienie pochodzenia linii spektralnych było największym sukcesem modelu Bohra. Nie wyjaśnia on natomiast dlaczego stanem o najniższej energii ma być ten o $n=1$, nie zaś $n=0$, nie wyjaśnia też stabilności atomu. Te problemy można było dopiero rozwiązać na gruncie mechaniki kwantowej.



Dygresja

Wprowadzanie sił bezwładności często budzi kontrowersje, warto więc pokazać, że równanie równowagi $mv^2/r = e^2/r^2$ można łatwo wyprowadzić nie odwołując się do pojęcia sił bezwładności. Rozpatrując ruch pod działaniem siły Coulomba po okręgu o ustalonym promieniu r znajdującym się w płaszczyźnie x - y , mamy dwa newtonowskie równania ruchu

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{e^2}{r^3}x \\ m\ddot{y} = -\frac{e^2}{r^3}y \end{cases} \quad \text{znak minus wynika z faktu, że siła jest przyciągająca}$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe (r, φ) , współrzędne kartezjańskie równe są $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$, a równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{cases} -mr(\cos \varphi \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \ddot{\varphi}) = -\frac{e^2}{r^2} \cos \varphi \\ -m(\sin \varphi \dot{\varphi}^2 - \cos \varphi \ddot{\varphi}) = -\frac{e^2}{r^2} \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \ddot{\varphi} = \frac{e^2}{mr^3} \cos \varphi \\ \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - \cos \varphi \ddot{\varphi} = \frac{e^2}{mr^3} \sin \varphi \end{cases}$$

Mnożąc pierwsze równanie przez $\sin \varphi$, a drugie przez $\cos \varphi$ i odejmując stronami od pierwszego równania drugie, dostajemy $\ddot{\varphi} = 0$, co oznacza, że ruch po okręgu odbywa się ze stałą prędkością kątową $\dot{\varphi}$.

Mnożąc pierwsze równanie przez $\cos \varphi$, a drugie przez $\sin \varphi$ i dodając równania stronami, dostajemy

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{e^2}{mr^3} \Rightarrow mr\dot{\varphi}^2 = \frac{e^2}{r^2} \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2},$$

gdzie zostało uwzględnione, że $v = r\dot{\varphi}$.