Ćwiczenia VIII Podstawy fizyki kwantowej

Zadanie 1

Rozwiązania jednowymiarowego równania Schrödingera z energią potencjalną daną wzorem

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{dla} \quad x < -a, \\ 0 & \text{dla} \quad -a \le x \le a, \\ \infty & \text{dla} \quad a < x, \end{cases}$$

czyli rozwiązania zagadnienia jednowymiarowej jamy potencjalnej, są postaci

$$\begin{cases} \varphi_n^+(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\pi \left(n + \dfrac{1}{2} \right) \dfrac{x}{a} \right), \\ \varphi_n^-(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\pi n \dfrac{x}{a} \right), \end{cases} \qquad \begin{cases} k_n^+ = \left(n + \dfrac{1}{2} \right) \dfrac{\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ k_n^- = n \dfrac{\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

przy czym funkcje falowe znikają dla $|x| > a$. Wykazać, że te funkcje tworzą zbiór ortonormalny.

Zadanie 2

W jamie potencjalnej z zadania 1 znajduje się cząstka, której przestrzenna część funkcji falowej w chwili czasu $t = 0$ dana jest wzorem

$$\varphi(x) = Cx\left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right),$$

gdzie C jest stałą normalizacyjną. Zakładamy, oczywiście, że funkcja falowa znika dla $|x| > a$.

1) Wyznaczyć stałą C.
2) Określić możliwe wartości energii cząstki wraz z prawdopodobieństwami ich występowania.
3) Wyliczyć średnią wartość energii.
4) Znaleźć funkcję falową będąca rozwiązanie równania Schrödingera, której część przestrzenna w $t = 0$ jest równa funkcji $\varphi(x)$ oraz omówić jej własności.